MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA MA TRẬN, HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VÀ KÝ HIỆU HÌNH THỨC TRONG VIỆC SÁNG TÁC VÀ GIẢI TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

NGUYỄN VĂN THÁI BÌNH, ĐÀM VĂN NHỈ, NGUYỄN TIẾN TRUNG

Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

I. MỞ ĐẦU

Một trong những hướng nghiên cứu quan trọng hiện nay trong quá trình thực hiện đổi mới phương pháp dạy học là làm rõ tính hệ thống của nội dung dạy học nói chung, nội dung toán học nói riêng, từ thấp đến cao, tức là từ cấp Trung học Cơ sở, Trung học Phổ thông lên Đại học và Cao đẳng.

Với mong muốn tìm ra mối liên hệ cần thiết giữa toán học sơ cấp và toán học cao cấp, toán học hiện đại, chúng tôi thực hiện nghiên cứu theo hai hướng: Nhìn bài toán sơ cấp dưới góc độ toán học hiện đại; Xây dựng bài toán sơ cấp từ bài toán cao cấp (sơ cấp hóa bài toán cao cấp).

Trong trường phổ thông, việc thực hiện nghiên cứu theo hai hướng trên có thể giúp giáo viên sáng tác nhiều bài toán mới, làm tư liệu cho việc phát huy tính sáng tạo của học sinh trong quá trình giải toán. Đồng thời, việc làm này cũng góp phần trợ giúp giáo viên trong việc định hướng lời giải nhiều bài toán sơ cấp phức tạp, đòi hỏi khả năng tư duy cao. Một lợi ích quan trọng nữa là có thể giúp người giáo viên thấy rõ được tính hệ thống, sự liên hệ giữa toán học cao cấp (mà mỗi giáo viên đã được học trong các giảng đường đại học, cao đẳng) và toán học sơ cấp.

Với những lợi ích cũng như mong muốn như trên, trong bài báo này, chúng tôi phát hiện và trình bày một số liên hệ, ứng dụng của ma trận, hệ phương trình tuyến tính (trong đại số tuyến tính) và ký hiệu hình thức để sáng tác và giải một số bài toán sơ cấp trong chương trình toán học phổ thông.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

§ 1. Nghiên cứu dãy qua ma trận

Sử dụng ma trận và một số tính chất của nó, ta có thể nghiên cứu nhiều dãy số. Trong khuôn khổ bài báo này, chúng tôi sẽ giới thiệu và trình bày 2 ví dụ.

Ví dụ 1. Cho ba dãy số nguyên dương $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 = 3,\ y_1 = 4,\ z_1 = 5, \\ x_{n+1} = 3x_n + 2z_n + 1, \\ y_{n+1} = 3x_n + 2z_n + 2, \\ z_{n+1} = 4x_n + 3z_n + 2, \\ n \geq 1 \end{cases}$$

Hãy xác định công thức của mỗi dãy, từ đó suy ra rằng mỗi bộ (x_n, y_n, z_n) với mọi $n \geq 1$ đều là một bộ ba Pythagore. (Bộ ba số nguyên dương (x, y, z) được gọi là bộ ba Pythagore nếu $x^2 + y^2 = z^2$).

Giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 = 3,\ y_1 = 4,\ z_1 = 5, \\ x_{n+1} = 3x_n + 2z_n + 1, \\ y_{n+1} = x_{n+1} + 1, \\ z_{n+1} = 4x_n + 3z_n + 2, \quad n \ge 1 \end{cases}$$

Dùng phép biến đổi tuyến tính $x_n = t_n - \frac{1}{2}, \quad z_n = z_n$ ta đưa hệ đã cho về hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 = 3,\ y_1 = 4,\ z_1 = 5, \\ t_{n+1} = 3t_n + 2z_n, \\ z_{n+1} = 4t_n + 3z_n, \\ x_{n+1} = t_{n+1} - \frac{1}{2}, \\ y_{n+1} = x_{n+1} + 1, \quad n \ge 1 \end{cases}$$

Ta biểu diễn $t_{n+1} + \lambda z_{n+1} = (3+4\lambda)t_n + (2+3\lambda)z_n$. Chọn λ sao cho $(2+3\lambda) = \lambda(3+4\lambda)$ hay $4\lambda^2 - 2 = 0$, tức là $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Khi đó ta được

$$\begin{cases} t_{n+1} + \lambda_1 z_{n+1} = (3+4\lambda_1)^n (t_1 + \lambda_1 z_1) \\ t_{n+1} + \lambda_2 z_{n+1} = (3+4\lambda_2)^n (t_1 + \lambda_2 z_1) \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\lambda_2(3+4\lambda_1)^n\left(\frac{7}{2}+5\lambda_1\right) - \lambda_1(3+4\lambda_2)^n\left(\frac{7}{2}+5\lambda_2\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\lambda_2(3+4\lambda_1)^n\left(\frac{7}{2}+5\lambda_1\right) - \lambda_1(3+4\lambda_2)^n\left(\frac{7}{2}+5\lambda_2\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ z_{n+1} = \dfrac{(3+4\lambda_1)^n\left(\frac{7}{2}+5\lambda_1\right) - (3+4\lambda_2)^n\left(\frac{7}{2}+5\lambda_2\right)}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad n \ge 0 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n(7+5\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})^n(7-5\sqrt{2})}{4}, \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n(7+5\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})^n(7-5\sqrt{2})}{4}, \\ z_{n+1} = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n(7+5\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})^n(7-5\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}, \qquad n \ge 0. \end{cases}$$

Đến đây, nếu đặt $a = \left(3+2\sqrt{2}\right)^n\left(7+5\sqrt{2}\right)$ thì dễ dàng thấy rằng $\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\left(7-5\sqrt{2}\right) = -\dfrac{1}{a}$ và do đó ta có

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]^2$$

Vậy, $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = z_{n+1}^2$, $n \geq 0$ hay với mọi n thì (x_n, y_n, z_n) là bộ ba Pythagore. ■

Ví dụ 2. *Xét dãy Fibonacci: $\{a_0 = a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geq 1\}$. Chứng minh rằng:*

(i) $a_{n+m} = a_n a_m + a_{n-1}a_{m-1}$ *với mọi $n \geq 1$, và a_{2n+1}, a_{3n+2} là bội của a_n với mọi $n \geq 0$;*

(ii) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix}a_{n+1} & a_n\\ a_n & a_{n-1}\end{pmatrix}$, $n \geq 1$;

(iii) $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + (-1)^{n+1}$;

(iv) a_{n+1}, a_n *nguyên tố cùng nhau.*

Giải. Ta biểu diễn

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix},\ n \geq 1.$$

Do đó
$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ n \geq 1.$$

Đặt $x = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ta có $x^2 - x - I = 0$. Phương trình đặc trưng là $t^2 - t - 1 = 0$ có hai nghiệm là $t_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Lại tiếp tục đặt $y = \begin{pmatrix}t_1 & 1\\ t_1 & 1\end{pmatrix}$ ta có $y^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -t_1 & t_2\end{pmatrix}$ và

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = x^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = y^{-1}yx^ny^{-1}y\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -t_1 & t_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_2^n & 0\\ 0 & t_1^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_2 & 1\\ t_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Như vậy, ta suy ra công thức tổng quát của dãy Fibonacci là;

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(t_2^{n+1} - t_1^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Từ đó: (i) được suy ra một cách dễ dàng từ công thức của tổng quát của $\{a_n\}$.

(ii) Đặt $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ta dễ dàng kiểm tra rằng

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2c+d \end{pmatrix}$$

Hơn nữa $$\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & a+b \\ 2c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$$

nên ta suy ra $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}, \ n \geq 1.$$

(iii) Lấy định thức hai vế của đẳng thức trong (ii) ta được (iii).

(iv) Suy ra từ (iii). ■

§ 2. Ký hiệu hình thức để sáng tác bài toán và giải toán

Ở phần này, chúng tôi giới thiệu một cách làm thú vị: sáng tác ra những bài toán mới cũng như giải được một lớp các bài toán trong chương trình THPT thông qua việc sử dụng các ký hiệu hình thức.

Ví dụ 3. *Chứng minh rằng nếu f, g là những hàm thoả mãn điều kiện* $g(n) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f(i)$ *với mọi số tự nhiên n thì* $f(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} C_n^i g(i)$ *với mọi số tự nhiên n.*

Giải. Đặt $p_n = g(n)$, $q_n = f(n)$ ta có $p_n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i q_i$. Nếu viết một cách hình thức p_n qua p^n và q_n qua q^n thì khi đó ta có $p^n = (q+1)^n$, với mọi số tự nhiên n. Vậy ta có $(p+x)^n = (q+1+x)^n$. Vậy, cho $x = -1$ ta được $q^n = (p-1)^n$ hay $q_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n C_n^i p_i$. ■

Ví dụ 4. *Tính số các hoán vị của n phần tử, trong đó không có một phần tử nào chiếm lại vị trí đầu tiên.*

Giải. Gọi số các phép thế phải tìm là q_n và đặt $p_n = n!$. Xét tất cả các phép thế p_n, trong đó có chứa q_n là những phép thế không có phần tử nào chiếm lại vị trí đầu tiên. Số các phép thế trong đó chỉ có 1 phần tử chiếm lại vị trí đầu tiên là np_{n-1}. Tương tự, số các phép thế trong đó có đúng 2 phần tử chiếm lại vị trí đầu tiên là $C_n^2 p_{n-2}$, v.v... Cuối cùng, số các phép thế trong đó tất cả các phần tử chiếm tại vị trí đầu tiên là $C_n^n q_0 = 1$. Vậy ta có

$$p_n = C_n^0 q_n + C_n^1 q_{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} q_1 + C_n^n q_0.$$

Ký hiệu hình thức $p^n = (q+1)^n$, với q^i được thay bởi q_i sau khai triển. Với quy ước như vậy, có thể viết đồng nhất thức ký hiệu đúng với mọi giá trị của x là

$$(p+x)^n = (q+1+x)^n,$$

vì chỗ nào có p^i ta thay bằng $(q+1)^i$. Cho $x = -1$ ta có $q^n = (p-1)^n$

Chuyển trở lại, ta có

$$q_n = C_n^0 p_n - C_n^1 p_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^1 p_1 + (-1)^n C_n^n p_0$$

hay $$q_n = C_n^0 n! - C_n^1 (n-1)! + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^1 1! + (-1)^0 C_n^n 0!.$$ ■

Ví dụ 5. Có bao nhiêu cách sắp xếp n chữ cái khác nhau vào r ô sao cho ở mỗi ô có ít nhất một chữ cái?

Giải. Nếu $n = 1$ thì số cách sắp xếp 1 chữ vào r đúng bằng r, vì ô này có một chữ thì các ô còn lại trống.

Nếu $n = 2$ số cách sắp xếp 2 chữ vào r ô là r^2, vì từ mỗi cách sắp xếp trên ta xếp chữ thứ hai liên tiếp vào ô thứ nhất hoặc thứ hai, v.v...

Tương tự cách sắp xếp n chữ vào r ô đúng bằng r^n.

Ký hiệu số cách sắp xếp n chữ vào r ô, trong đó mỗi ô có ít nhất một chữ cái là q_r. Trong số r^n cách sắp xếp trên ta xét những cách sắp xếp mỗi ô có ít nhất 1 chữ cái. Số cách sắp xếp là q_r. Sau đó ta xét tất cả các cách sắp xếp trong đó có một và chỉ một ô trống. Số cách sắp xếp này là rq_{r-1}. Tiếp theo là tất cả các cách sắp xếp trong đó có đúng hai ô trống. Số cách sắp xếp này là $C_r^2 q_{r-2}$. Rồi cứ lặp lại như thế. Ta được:

$$r^n + 1 = C_r^0 q_r + C_r^1 q_{r-1} + \ldots + C_r^{r-1} q_1 + 1.$$

Ký hiệu hình thức $r^n + 1 = (q+1)^r$, với q^i được thay bởi q^i sau khai triển. Ta lại có

$$(q + 1 + x)^r = \sum_{i=0}^{r} C_r^i x^i (q+1)^{r-i}.$$

Với quy ước như trên, ta có thể viết đồng nhất thức sau đúng cho mọi giá trị của x:

$$(q + 1 + x)^r = \sum_{i=0}^{r} C_r^i x^i [(r - i)^n + 1].$$

Cho x = –1, ta được

$$q^r = \sum_{i=0}^{r} C_r^i (-1)^i [(r-i)^n + 1] = \sum_{i=0}^{r} C_r^i (-1)^i (r-i)^n + \sum_{i=0}^{r} C_r^i (-1)^i$$

Chuyển trở lại như quy ước ban đầu, ta có công thức

$$q_r = \sum_{i=0}^{r} C_r^i (-1)^i (r-i)^n, \text{ (vì } \sum_{i=0}^{r} C_r^i (-1)^i = (1-1)^r = 0 \text{)}. \quad \blacksquare$$

Ví dụ 6. Ký hiệu $p_n(i)$ là số hoán vị của tập gồm n phần tử mà trong đó có đúng i phần tử cố định. Chứng minh rằng

(i) $\sum_{i=0}^{n} i p_n(i) = n!$; (ii) $\sum_{i=0}^{n} (i-1)^2 p_n(i) = n!$.

Giải. (i) Ta có $ip_n(i) = iC_n^i q_{n-i} = nC_{n-1}^{i-1} q_{n-1-(i-1)}$

và từ $p_{n-1} = C_{n-1}^0 q_{n-1} + C_{n-1}^1 q_{n-2} + \ldots + C_{n-1}^1 q_0$

ta suy ra $\sum_{i=0}^{n} ip_n(i) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i q_{n-i} = n.(n-1)! = n!$.

(ii) Ta có $(i-1)^2 p_n(i) = (i-1)^2 C_n^i q_{n-i}$.

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức

$$(p + x)^n = (q + 1 + x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (x+1)^i q^{n-i}.$$

ta được $$n(p+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i (x+1)^{i-1} q^{n-i}$$

$$\Rightarrow n(p+x)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (i-1)C_n^i (x+1)^{i-1} q^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} C_n^i (x+1)^{i-1} q^{n-i}$$

Lại tiếp tục lấy đạo hàm hai vế, và sau đó cho $x = 0$ ta được

$$n! = \sum_{i=2}^{n} (i-1)^2 C_n^i q_{n-1} + \sum_{i=2}^{n} (i-1) C_n^i q_{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (i-1)^2 p_n(i) - q_n + \sum_{i=2}^{n} (i-1) C_n^i q_{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (i-1)^2 p_n(i) + \sum_{i=0}^{n} iC_n^i q_{n-i} - \sum_{i=0}^{n} C_n^i q_{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (i-1)^2 p_n(i) + n! - n! \text{ (theo (i))}$$

Vậy $\sum_{i=0}^{n} (i-1)^2 p_n(i) = n!$. ■

III. KẾT LUẬN

Việc nghiên cứu theo hướng ứng dụng một số kết quả của toán học cao cấp vào toán học sơ cấp có tính khả thi và có tiềm năng. Chúng ta có thể nghiên cứu và ứng dụng một số nội dung của toán học cao cấp để sáng tác và giải nhiều bài toán trong chương trình toán phổ thông.

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số ứng dụng của ma trận và hệ phương trình tuyến tính (trong đại số tuyến tính) và ký hiệu hình thức để sáng tác và giải một số bài toán sơ cấp. Cụ thể là: tìm công thức tổng quát của dãy số qua ma trận và hệ phương trình tuyến tính; thực hiện phép đếm thông qua các ký hiệu hình thức.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. D.Faddêev et I. Sominski. *Recueil d'Exercices d'Algebre superieure*. Editions Mir Moscou, 1977.

[2]. V. Prasolov. *Polynomials*. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

[3]. K. H. Wehrhahn. *Combinatorics An Introduction*. Carslow Publications, 1991.

SUMMARY

SOME APPLICATIONS OF MATRIC AND SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS AND SYMBOLIC FORM TO CREATE AND SOLVE SOME PROBLEMS IN SECONDARY SCHOOL

NGUYEN VAN THAI BINH,

DAM VAN NHI, NGUYEN TIEN TRUNG

In this article, we present some applications of matric and system of linear equations and symbolic form to create and solve some problems in elementary algebra: definition of the sequence of numbers formula by the way of using matric and system of linear equations, counting operation by symbolic form.