

# TÍNH CHẤT CƠ LÝ VẬT LIỆU HỖN Độn NHIỀU THÀNH PHẦN

**Phạm Đức Chính**

Viện Cơ học

264 – Đội Cấn, Ba Đình, Hà Nội

Email: [pdchinh@imech.ac.vn](mailto:pdchinh@imech.ac.vn)

## **Tóm tắt:**

*Báo cáo giới thiệu một số kết quả nhận được trong đánh giá các tính chất cơ lý vĩ mô (hệ số dẫn, hệ số đàn hồi) của vật liệu hỗn độn nhiều thành phần đẳng hướng, vật liệu tựa đối xứng và đa tinh thể. Các tính toán đã chỉ ra rằng các tính chất của phần lớn các vật liệu đa tinh thể thường gặp chỉ có thể được xác định với độ chính xác tới hai hay ba chữ số có ý nghĩa.*

## **Abstract:**

*We present some results on estimating the macroscopic properties (coefficient of conductivity, elastic constants) of disordered multicomponent materials, including quasisymmetric materials, and random polycrystals. The numerical results indicate that the properties of most practical polycrystalline materials can be determined with the accuracy only within two to three significant digits.*

## **1. Mở đầu:**

Xét vật liệu hỗn độn nhiều thành phần là các vật liệu đẳng hướng với các tính chất dẫn (điện, nhiệt...)  $C_\alpha$ , các hệ số đàn hồi  $k_\alpha, \mu_\alpha$  và tỉ lệ thể tích  $v_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ). Liên kết giữa các thành phần được cho là lý tưởng. Vì vật liệu là hỗn độn trong không gian và theo mọi hướng, nên nó là một vật liệu đẳng hướng vĩ mô với các tính chất vĩ mô  $C^e, k^e, \mu^e$ . Các tính chất vĩ mô này không chỉ phụ thuộc các tính chất và tỉ lệ thể tích các thành phần cấu thành, mà còn vào hình học pha-thường rất phức tạp của vật liệu. Các kỹ sư thường sử dụng công thức xấp xỉ sau đây cho hệ số dẫn vĩ mô, được gọi là trung bình cộng số học:

$$C^e \approx C^V = \sum_{\alpha=1}^n v_\alpha C_\alpha, \quad (1)$$

hoặc trung bình cộng điều hoà:

$$C^e \approx C^R = \left( \sum_{\alpha=1}^n v_\alpha C_\alpha^{-1} \right)^{-1}; \quad (2)$$

và các công thức tương tự cho các hệ số đàn hồi  $k^e, \mu^e$ . Trong nhiều trường hợp phương trình (1) cho xấp xỉ tốt, trong các trường hợp khác phương trình (2) cho kết quả tốt hơn và người ta đã chứng minh được:

$$C^V \geq C^e \geq C^R \quad (3)$$

- được gọi là đánh giá Wiener hay Voigt – Reuss – Hill [1]. Trong trường hợp tính chất các thành phần khác nhau nhiều, khoảng đánh giá (3) là quá rộng. Hashin và Shtrikman đã xây dựng được đánh giá hẹp hơn nhiều đánh giá (3) cho hệ số dẫn [2]:

$$P_C(2C_{\max}) \geq C^e \geq P_C(2C_{\min}), \quad (4)$$

$$P_C(\mathbf{C}_*) = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{v_\alpha}{C_\alpha + \mathbf{C}_*} \right)^{-1} - \mathbf{C}_*, \quad (5)$$

$$\mathbf{C}_{\max} = \max\{\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_n\}, \mathbf{C}_{\min} = \min\{\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_n\}; \quad (6)$$

va cho các hệ số đàn hồi [3]:

$$P_k(k, (\mu_{\max})) \geq k^e \geq P_k(k, (\mu_{\min})) \quad (7)$$

$$P_k(k_*) = \left( \sum_{\alpha=1}^n \frac{v_\alpha}{k_\alpha + k_*} \right)^{-1} - k_*, \quad k_*(\mu_0) = \frac{4}{3} \mu_0, \quad (8)$$

$$P_\mu(\mu, (k_{\max}, \mu_{\max})) \geq \mu^e \geq P_\mu(\mu, (k_{\min}, \mu_{\min})) \quad (9)$$

$$P_\mu(\mu_*) = \left( \sum_{\alpha=1}^n \frac{v_\alpha}{\mu_\alpha + \mu_*} \right)^{-1} - \mu_*, \quad \mu_*(\mu_0) = \mu_0 \frac{9k_0 + 8\mu_0}{6k_0 + 12\mu_0}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} k_{\max} = \max\{k_1, \dots, k_n\}, k_{\min} = \min\{k_1, \dots, k_n\}, \\ k_{\max} = \max\{k_1, \dots, k_n\}, k_{\min} = \min\{k_1, \dots, k_n\}. \end{cases} \quad (11)$$

Đối với đa tinh thể hỗn độn tạo thành bởi các đơn tinh thể có tính chất  $\mathbf{C}$  (là tenxơ bậc hai cho hệ số dẫn, và tenxơ bậc bốn cho hệ số đàn hồi), đánh giá Voigt – Reuss – Hill có dạng:

$$\langle \mathbf{C} \rangle \geq \mathbf{C}^e \geq \langle \mathbf{C}^{-1} \rangle^{-1}, \quad (12)$$

trong đó  $\langle \cdot \rangle$  ký hiệu giá trị trung bình lấy theo mọi hướng. Đánh giá Hashin – Strikman cho đa tinh thể cũng đã được thiết lập [4, 5].

Các nghiên cứu tiếp theo tập trung vào khả năng xây dựng các đánh giá tốt hơn và đưa thêm vào các đánh giá thông tin về hình học pha của vật liệu [6 – 12], trong đó có các kết quả mới của chúng tôi.

## 2. Phần tử đặc trưng và tính chất vi mô:

Cho đơn giản, chúng ta xem xét bài toán dẫn đối với vật thể  $B$  làm từ vật liệu không đồng nhất. Các tác động ngoài gây ra trong  $B$  một trường gradient  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B. \quad (13)$$

Trong đó  $\varphi$  là trường thế (điện thế, nhiệt độ...). Dòng (điện, nhiệt,...) tương ứng  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  thỏa mãn phương trình cân bằng:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in B. \quad (14)$$

Dòng  $\mathbf{J}$  liên hệ với trường  $\mathbf{E}$  qua  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x})$ , trong đó  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  là tenxơ bậc hai và là hệ số dẫn của các vật liệu thành phần. Liên kết giữa các pha là lý tưởng nên trường thế  $\varphi$  và thành phần pháp tuyến của dòng  $\mathbf{J}$  liên tục trên mặt phân cách giữa các pha. Chúng ta chọn một phần tử « tại chỗ », chiếm vùng  $V$  trong vật thể  $B$ . Phần tử đại diện  $V$  (gọi tắt là RVE) phải đủ nhỏ so với  $B$ , nhưng cũng phải đủ lớn so với các kích thước vi mô của các vật liệu cấu thành, để  $V$  có thể thực sự được coi là đại diện cho vật liệu được xem xét. Trường « tại chỗ »

trên  $V$  được ký hiệu là  $\varphi^*(x)$ ,  $\mathbf{E}^*(x)$ ,  $\mathbf{J}(x)$  trong khi đó giá trị trung bình trên  $V$ , chẳng hạn của  $\mathbf{E}(x)$  được ký hiệu là  $\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E}(x) dx$ , trong đó  $V$  đồng thời cũng ký hiệu thể tích của miền  $V$ . Tính chất « tại chỗ »  $\mathbf{C}^{EJ}$ ,  $\mathbf{C}^E$ ,  $\mathbf{C}^J$ , của phần tử « tại chỗ »  $V$  được định nghĩa như sau qua quan hệ xác định:

$$\langle \mathbf{J}^* \rangle = \mathbf{C}^{EJ} \cdot \langle \mathbf{E}^* \rangle, \quad (15)$$

và qua các biểu thức năng lượng:

$$\langle \mathbf{E}^* \rangle \cdot \mathbf{C}^E \cdot \langle \mathbf{E}^* \rangle = \langle \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{C}^E \cdot \mathbf{E}^* \rangle = \langle \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{J}^* \rangle = \langle \mathbf{J}^* \rangle \cdot (\mathbf{C}^J)^{-1} \cdot \langle \mathbf{J}^* \rangle. \quad (16)$$

Tính chất thể hiện  $\mathbf{C}^{1E}$ ,  $\mathbf{C}^{1J}$  thường được xác định qua cực trị của các p hiếm hàm năng lượng:

$$\mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{C}^{1E} \cdot \mathbf{E}^0 = \inf_{\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}^0} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \rangle, \quad (17)$$

$$\mathbf{J}^0 \cdot (\mathbf{C}^{1J})^{-1} \cdot \mathbf{J}^0 = \inf_{\langle \mathbf{J} \rangle = \mathbf{J}^0} \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{J} \rangle. \quad (18)$$

Chú ý rằng  $\mathbf{E}$  trong (17) và  $\mathbf{J}$  trong (18) cần thỏa mãn tương ứng các phương trình ràng buộc (13) và (14).

**Giả thiết RVE:** Tất cả các tính chất thể hiện  $\mathbf{C}^{EJ}$ ,  $\mathbf{C}^E$ ,  $\mathbf{C}^J$ ,  $\mathbf{C}^{1E}$ ,  $\mathbf{C}^{1J}$  đều hội tụ với độ chính xác tiệm cận tùy ý, khi kích thước của  $V$  tăng dần, tới giá trị gọi là tính chất hiệu quả  $\mathbf{C}^e$  của  $V$ , còn  $V$  được gọi là một phần tử đại diện đặc trưng (RVE) của vật liệu với độ chính xác tiệm cận đó.

Tuy nhiên khác với quan niệm truyền thống rằng tính chất hiệu quả của vật liệu  $\mathbf{C}^e$  là duy nhất, chúng tôi cho rằng:

**Giả thuyết đồng nhất yếu:** Tính chất hiệu quả  $\mathbf{C}^e$  của mọi phần tử đại diện RVE của một vật liệu hỗn độn phân bố trong một giới hạn – gọi là giới hạn bất định đối với tính chất hiệu quả của vật liệu:

$$\mathbf{C}^e \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{E}^0 \leq \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{E}^0 \leq \mathbf{C}^U \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{E}^0, \forall \mathbf{E}^0, \quad (19)$$

với  $\mathbf{C}^L$  và  $\mathbf{C}^U$  là các giới hạn dưới và trên của khoảng bất định đó.

Đánh giá các giới hạn bất định cho các tính chất dẫn và đàn hồi của đa tinh thể hỗn độn là những kết quả trọng tâm của chúng tôi.

### 3. Các đánh giá cho vật liệu đẳng hướng nhiều thành phần

Từ biểu diễn năng lượng (17) và sử dụng trường khả dĩ phân cực Hashin – Strikman ta nhận được đánh giá trên như sau cho hệ số dẫn hiệu quả của vật liệu đẳng hướng  $n$  thành phần:

$$\mathbf{C}^U = \mathbf{P}_c(2\mathbf{C}^0) + 3 \left( \sum_{\alpha=1}^n \frac{v_\alpha}{\mathbf{C}_\alpha + 2\mathbf{C}^0} \right)^{-1} \cdot \sum_{\alpha=1}^n \left[ (\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{C}^0) \sum_{\chi, \gamma=1}^n \mathbf{A}_\alpha^{\beta\gamma} \mathbf{X}_\beta \mathbf{X}_\gamma \right], \quad (20)$$

$$\mathbf{X}_\beta = \sum_{\alpha=1}^n \frac{v_\alpha}{\mathbf{C}_\alpha + 2\mathbf{C}^0} - \frac{1}{\mathbf{C}_\beta + 2\mathbf{C}^0}, \quad (21)$$

$$\mathbf{A}_\alpha^{\beta\gamma} = \int_{v_\alpha} \varphi_{,ij}^\beta \varphi_{,ij}^\gamma dx - \frac{v_\alpha}{3} \delta_{\beta\alpha} \delta_{\gamma\alpha}, \quad (22)$$

$$\varphi^\alpha(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{v_\alpha} |x-y|^{-1} dy, \nabla^2 \varphi^\alpha = \delta_{\alpha\beta}, \quad (23)$$

trong đó  $\mathbf{C}^0$  là số dương bất kỳ,  $\delta_{\alpha\beta}$  là ký hiệu Kronecker delta, các chỉ số  $i, j$  sau dấu phẩy là đạo hàm theo các tọa độ Đề các tương ứng. Biểu thức đánh giá (20) có các thành phần nhiều chứa hệ số  $A_\alpha^{\beta\gamma}$  mô tả thống kê bậc ba về hình học pha của vật liệu và sẽ giúp chúng ta xây dựng được các đánh giá tốt hơn các đánh giá trước đây. Biểu thức đánh giá cho các modul đàn hồi ngoài các hệ số  $\mathbf{A}_\alpha^{\beta\gamma}$  có chứa thêm các hệ số  $\mathbf{B}_\alpha^{\beta\gamma}$  hình thành từ các hàm thế song điều hoà. Chính nhờ thiết lập được mối quan hệ bất đẳng thức giữa 2 loại hệ số này chúng tôi đã xây dựng được đánh giá tốt hơn đánh giá Hashin – Strikman (9) cho modul trượt  $\mu^e$  của vật liệu đẳng hướng nhiều thành phần, khi  $k_{min}$  và  $\mu_{min}$  ( $k_{max}$  và  $\mu_{max}$ ) không thuộc về cùng một pha [8].

Chúng tôi cũng đưa ra được mô hình quả cầu lồng nhau nhiều pha, khi các hệ số  $A_\alpha^{\beta\gamma}$  có thể tính giải tích chính xác [10]. Trong trường hợp vật liệu 2 pha đánh giá trên và dưới hội tụ. Đối với vật liệu đối xứng – vật liệu có thể chia ra nhiều phần thể tích bằng nhau sao cho khi đổi chỗ 2 thành phần bất kỳ thì tính chất vật liệu không thay đổi – các hệ số  $A_\alpha^{\beta\gamma}$  (và tương ứng  $B_\alpha^{\beta\gamma}$ ) chỉ còn phụ thuộc vào hai tham số hình học  $f_1$  và  $f_2$  [9], ( $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ ).

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\alpha^{\beta\gamma} = v_\alpha v_\beta v_\gamma (f_1 - f_2), \mathbf{A}_\alpha^{\alpha\alpha} = v_\alpha (1 - v_\alpha) [(1 - v_\alpha) f_1 + v_\alpha f_2] \\ \mathbf{A}_\alpha^{\alpha\beta} = v_\alpha v_\beta [(v_\alpha - 1) f_1 - v_\alpha f_2], \mathbf{A}_\alpha^{\beta\beta} = v_\alpha v_\beta [(1 - v_\beta) f_2 + v_\beta f_1] \end{cases} \quad (24)$$

Chúng tôi đã nhận được các đánh giá cho vật liệu tựa đối xứng nằm trong đánh giá Hashin – Strikman. Chẳng hạn đánh giá cho hệ số dẫn vật liệu tựa đối xứng 2 pha có dạng đơn giản như sau [9]:

$$P_C(2\mathbf{C}^U) \geq C^e \geq P_C(2\mathbf{C}^L), \quad (25)$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_0^U = \max\{v_1 \mathbf{C}_1 + v_2 \mathbf{C}_2, v_1 \mathbf{C}_2 + v_2 \mathbf{C}_1\}, \\ \mathbf{C}_0^L = \min\left\{\left(\frac{v_1}{\mathbf{C}_1} + \frac{v_2}{\mathbf{C}_2}\right)^{-1}, \left(\frac{v_1}{\mathbf{C}_2} + \frac{v_2}{\mathbf{C}_1}\right)^{-1}\right\} \end{cases} \quad (26)$$

#### 4. Đánh giá cho đa tinh thể hỗn độn

Coi đa tinh thể như một vật liệu hỗn độn  $n$  thành phần, mỗi thành phần tương ứng các hạt tinh thể có cùng hướng tinh thể. Khi cho  $n \rightarrow \infty$ , với mọi hướng tinh thể có mật bình đẳng trong không gian, chúng ta có được đa tinh thể hỗn độn.

Để xây dựng các đánh giá cho các tính chất vi mô của đa tinh thể hỗn độn chúng ta xuất phát từ các nguyên lý năng lượng và năng lượng bù cực tiểu (17), (18) (và các biểu diễn tương

ứng cho modul đàn hồi). Chúng tôi sử dụng trường phân cực Hashin – Strikman như các trường thực khả dĩ. Cũng tựa như (20), các biểu thức đánh giá chứa thành phần nhiều có các thông tin bậc ba về hình học pha của vật liệu. Để đánh giá các thành phần này, chúng tôi xây dựng hai giả thiết cơ bản: giả thiết đẳng hướng thông kê và giả thiết đối xứng thông kê.

Giả thiết đẳng hướng thông kê đòi hỏi các tenxơ được xây dựng trên hình học hỗn độn của đa tinh thể là các tenxơ đẳng hướng. Cụ thể với bài toán đàn hồi ta có từ biểu thức đơn giản của tenxơ đẳng hướng bậc hai tới biểu thức phức tạp của tenxơ đẳng hướng bậc tám như sau [12]:

$$\int_{V_\alpha} \varphi_{,ij}^\beta dx = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \quad , \quad (27)$$

$$\int_{V_\alpha} \Psi_{ijmn}^{\beta\alpha} \Psi_{klpq}^{\gamma\alpha} dx = \mathbf{K}_\alpha^{\beta\gamma} \Delta_{ijmn} \Delta_{klpq} + \mathbf{M}_\alpha^{\beta\gamma} \Delta_{klpq}^{ijmn} + \mathbf{L}_\alpha^{\beta\gamma} \overline{\Delta}_{klpq}^{ijmn} \quad , \quad (28)$$

trong đó :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{jmn} = \delta_{ij} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm} \\ \Delta_{klpq}^{ijmn} = \delta_{ik} \Delta_{lpq}^{jmn} + \delta_{il} \Delta_{kpq}^{jmn} + \delta_{ip} \Delta_{lpq}^{jmn} + \delta_{iq} \Delta_{lpq}^{jmn} \\ \Delta_{lpq}^{jmn} = \delta_{jl} \Delta_{pq}^{mn} + \delta_{jp} \Delta_{lq}^{mn} + \delta_{jq} \Delta_{lp}^{mn} \\ \Delta_{pq}^{mn} = \delta_{mp} \delta_{nq} + \delta_{mq} \delta_{np} \\ \overline{\Delta}_{klpq}^{ijmn} = \delta_{ij} \hat{\Delta}_{klpq}^{mn} + \delta_{im} \hat{\Delta}_{klpq}^{jn} + \delta_{in} \hat{\Delta}_{klpq}^{jm} + \delta_{jm} \hat{\Delta}_{klpq}^{in} + \delta_{jn} \hat{\Delta}_{klpq}^{im} + \delta_{mn} \hat{\Delta}_{klpq}^{ij} \\ \hat{\Delta}_{klpq}^{mn} = \Delta_{lpq}^{mnk} + \delta_{mk} \Delta_{pq}^{nl} + \delta_{mk} \delta_{nl} \delta_{pq} + \delta_{nk} \Delta_{pq}^{ml} + \delta_{nk} \delta_{ml} \delta_{pq} \end{array} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{ijkl}^{\beta\alpha} = \Psi_{ijkl}^\beta - \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \Psi_{ijkl}^\beta dx, \nabla^4 \varphi^\alpha(x) = \delta_{\alpha\beta}, x \in V_\beta \\ \Psi^\alpha(x) = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_\alpha} |x-y| dy \end{array} \right. \quad (30)$$

Giả thiết đối xứng thông kê đòi hỏi mọi sự đổi chỗ giữa hai nhóm tinh thể bất kỳ có hướng tinh thể khác nhau trong đa tinh thể hỗn độn không làm thay đổi giá trị các phiếm hàm xây dựng trên hình học của đa tinh thể hỗn độn. Giả thiết này dẫn tới các phương trình như (24).

Các giả thiết đó dẫn đến các đánh giá tựa (20) chỉ còn phụ thuộc bốn tham số hình học dương phụ thuộc thông tin bậc ba về hình học vi mô của vật liệu. Cho các tham số này mọi giá trị có thể, ta nhận được đánh giá cho khoảng không xác định của các tính chất vi mô của vật liệu đa tinh thể [11, 12]:

$$P_C(C^+) \geq C^* \geq P_C(C^-) \quad , \quad (31)$$

$$P_C(C^0) = \left\langle (C \cdot C^*)^{-1} \right\rangle^{-1} - C^* \quad , \quad (32)$$

trong đó  $C$  là tính chất của đơn tinh thể cơ sở (tenxơ bậc hai cho hệ số dẫn, và tenxơ bậc bốn cho hệ số đàn hồi). Tenxơ đẳng hướng  $C^*$  biểu diễn đơn giản qua tenxơ đẳng hướng  $C^0$ , với biểu thức cụ thể phụ thuộc vào tính dẫn hay đàn hồi, không gian hai chiều hay ba chiều; các tenxơ đẳng hướng  $C^+$ ,  $C^-$  cần là các lựa chọn tối ưu thoả mãn một số ràng buộc bất đẳng thức, mà quan trọng nhất là:

$$\mathbf{C}^{-} \geq \langle \mathbf{C} \rangle \cdot \mathbf{C}^{-} \leq \langle \mathbf{C}^{-1} \rangle^{-1}. \quad (33)$$

Trong nhiều trường hợp, đánh giá (31)-(33) có thể được xấp xỉ bởi biểu thức đơn giản hơn nhiều:

$$P_c(\langle \mathbf{C} \rangle) \geq \mathbf{C}^e \geq P_c(\langle \mathbf{C}^{-1} \rangle^{-1}) \quad (34)$$

Chúng tôi cho rằng các đánh giá (31)-(34) cho được khoảng bất định của các tính chất vĩ mô của các vật liệu đa tinh thể hỗn độn thường gặp – khẳng định cần được kiểm định bởi các thực nghiệm và mô phỏng số chính xác trong tương lai. Các đánh giá của chúng tôi cho kết quả là tính chất của phần lớn các vật liệu đa tinh thể sử dụng trong thực tế, trong đó có sắt, đồng,... không thể được xác định với độ chính xác cao hơn 2 – 3 chữ số.

Một số so sánh với thực nghiệm dù rất thô [13] cho thấy các điểm thực nghiệm hầu như phủ hết khoảng bất định được cho bởi kết quả lý thuyết (31) – (33), xem hình 1.

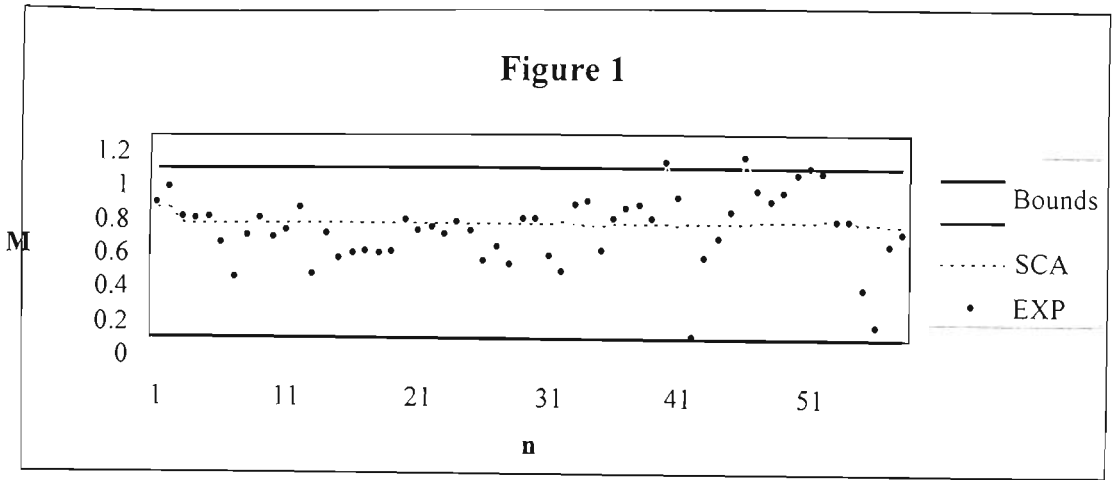
## 5. Lời cảm ơn:

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Quỹ NAFOSTED đã giúp đỡ chúng tôi hoàn thành nghiên cứu này.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hill R., The elastic behaviour of a crystalline aggregate. Proc. Phys. Soc. A65, 349-354( 1952)
2. Hashin Z., Shtrikman."Variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials". J.Appl.Phys.33,3125-3131(1962)
3. Hashin Z., Shtrikman."Variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials".J.Mech.Phys.Solids 11,127-140(1963).
4. Hashin Z., Shtrikman "Conductivity of polycrystals".Phys.Rev.130,129-133(1963).
5. Hashin Z., Shtrikman."Variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals.J.Mech.Phys.Solids 10,343-352(1962).
6. Milton G.W.The Theory of composites.Cambridge University Press.2001
7. Torquato S.,Random heterogeneous media.New York, Springer. 2002
8. Pham D.C., "Bounds on the effective shear modulus of multiphase materials Int.J.Engng.Sci. 31,11-17(1993)
9. Pham. D. C, "Bounds for the effective conductivity and elastic moduli of fully-disordered multicomponent materials". Archive Rational Mech. Analysis. 127,191-198(1994)
10. Pham. D. C "Estimations for the overall properties of some isotropic locally-ordered composites". Acta Mech. 121,177-190(1997)
11. Pham.D. C "Uncertainty ranges for the macroscopic resistivities and permeabilities of random polycrystalline aggregates".Phys.Rev.B 64,104205(2001)
12. Pham D. C "On the macroscopic elastic moduli of inhomogeneous materials and random orthorhombic polycrystals". Acta Mech. 206,59-68(2009)

Tiêu đề hình vẽ:

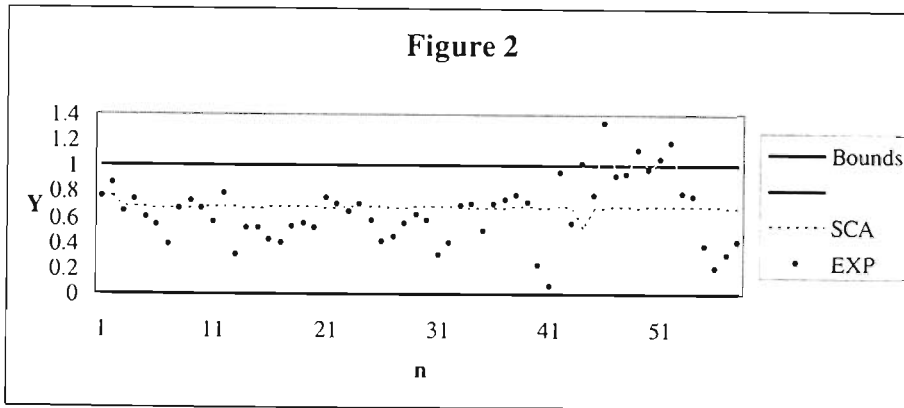


Hình 1: Các điểm thực nghiệm được cỡ hoá trong so sánh với các đánh giá đối với modul đàn hồi trượt của đa tinh thể.

Exp: Các kết quả thực nghiệm với modul trượt được cỡ hoá:  $M_{\text{exp}} = \frac{(\mu_{\text{exp}} - \mu^l)}{(\mu^U - \mu^l)}$ ;

SCA xấp xỉ “tự tương hợp”:  $M_{\text{SCA}} = \frac{(\mu_{\text{SCA}} - \mu^l)}{(\mu^U - \mu^l)}$ .

Đánh giá trên cỡ hoá:  $1 = \frac{(\mu^U - \mu^l)}{(\mu^U + \mu^l)}$ . Đánh giá dưới cỡ hoá:  $0 = \frac{(\mu^l - \mu^l)}{(\mu^U - \mu^l)}$ .



Hình 2: Các điểm thực nghiệm được cỡ hoá trong so sánh với các đánh giá đối với modul đàn hồi Young của đa tinh thể.

Exp: Các kết quả thực nghiệm với modul Young được cỡ hoá:  $Y_{\text{exp}} = \frac{(E_{\text{exp}} - E^l)}{(E^U - E^l)}$ ;

SCA xấp xỉ “tự tương hợp”:  $Y_{\text{SCA}} = \frac{(E_{\text{SCA}} - E^l)}{(E^U - E^l)}$ .

Đánh giá trên cỡ hoá:  $1 = \frac{(E^U - E^l)}{(E^U + E^l)}$ , đánh giá dưới cỡ hoá:  $0 = \frac{(E^l - E^l)}{(E^U - E^l)}$ .