# BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC
# TRONG CHƯƠNG TRÌNH TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

TS. TRẦN ANH TUẤN*

**1. Bài toán cực trị hình học**

Các bài toán (BT) về tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong hình học gọi là BT cực trị hình học (CTHH). Đối với BT cực trị, thường có nhiều con đường đi đến lời giải, trong đó có những cách giải độc đáo, sáng tạo. Có những BT cực trị gắn toán học với thực tiễn,...

BT CTHH thường có dạng chung là: trong số các hình có cùng một tính chất, tìm hình mà một đại lượng nào đó (như độ dài đoạn thẳng, số đo góc, số đo diện tích...) đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất. Có thể viết dạng tổng quát của một BT CTHH như sau: *tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f (chứa giá trị nào đó của hình H) có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất), nghĩa là ta phải chứng minh: - Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \leq m$ ($f \geq m$) với m là hằng số; - Xác định vị trí hình H* (trong các hình H) trên miền D sao cho f = m.*

**2. Một số dạng của BT CTHH**

***1) BT tính toán hoặc chứng minh các kết quả toán học.*** *Ví dụ: a)* Cho đường tròn (O, R) và điểm P nằm trong đường tròn, OP = h. Tính độ dài nhỏ nhất của dây cung đi qua P; *b)* Chứng minh rằng trong các dây cung đi qua điểm P trong đường tròn (O), dây vuông góc với OP có độ dài nhỏ nhất; *c)* Chứng minh rằng trong các tam giác có cùng đáy và diện tích, tam giác cân có chu vi nhỏ nhất.

***2) BT về tìm tập hợp điểm.*** *Ví dụ:* Cho A, B là hai điểm cố định. Điểm M di động sao cho MAB là tam giác có ba góc nhọn. Trong tam giác MAB, gọi H là trực tâm, K là chân đường vuông góc kẻ từ M. Tìm quỹ tích điểm M để tích KH x KM đạt giá trị lớn nhất.

***3) BT về dựng hình.*** *Ví dụ:* a) Xác định vị trí của dây cung đi qua điểm P trong một đường tròn sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất; b) Cho đường thẳng d và hai điểm A, B thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là d. Tìm điểm $M \in d$ sao cho MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

**3. Một số phương pháp giải toán cực trị trong hình học phẳng**

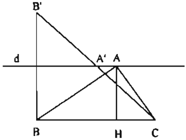
Chúng ta thường giải BT CTHH theo các phương pháp sau:

*Phương pháp 1:* Vẽ một hình có chứa đại lượng hình học cần tìm cực trị (giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất), thay các điều kiện của đại lượng đó bằng các điều kiện tương đương (có thể phải chọn một đại lượng làm ẩn số, dựa vào mối quan hệ giữa ẩn số đó với các đại lượng khác trong hình). Biểu thị ẩn số theo các đại lượng đã biết, sau đó biến đổi tương đương biểu thức vừa tìm được để xác định giá trị của đại lượng cần tìm. Từ đó suy ra vị trí của hình để đạt cực trị.

*Ví dụ 1:* Trong các tam giác có chung đáy và có cùng số đo diện tích, tam giác nào có chu vi nhỏ nhất?

*Hướng dẫn:* Xét các tam giác có chung đáy BC = a và có cùng diện tích là S. Gọi AH là đường cao tương ứng với đáy BC *(hình 1)*.

Ta có: $S = \frac{1}{2}$ AH.BC => AH $= \frac{2S}{a}$ (không đổi), suy ra A di động trên đường thẳng d // BC và cách BC một khoảng bằng $\frac{2S}{a}$. Do đó, cần xác định vị trí của điểm A trên d để chu vi tam giác $\Delta ABC$ có giá trị nhỏ nhất.



*Hình 1*

Chu vi tam giác ABC là: AB + BC + CA = AB + AC + a. Vì a không đổi nên chu vi ABC nhỏ nhất khi và chỉ khi AB + AC nhỏ nhất.

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua d, B'C cắt d tại A'. Xét $\Delta AB'C$, có: $AB' + AC \geq B'C$ (1). Thay AB' = AB; A'B' = A'B vào (1), suy ra: $AB + AC \geq A'B + A'C$; dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi B', A, C thẳng hàng, hay $A \equiv A'$.

Vì A'B = A'B' = A'C nên A'BC cân tại A'. Vậy, trong các tam giác có chung đáy và cùng diện tích, tam giác cân có chu vi nhỏ nhất.

*Nhận xét:* Khi giải BT, chúng ta đã thay các điều

* Trường Cao đẳng sư phạm Nghệ An

kiện của BT bằng các điều kiện tương đương và tìm được tam giác cân thỏa mãn điều kiện cực trị.

***Phương pháp 2:*** Đưa ra một hình thỏa mãn yêu cầu của BT, sau đó chứng minh mọi hình khác có chứa yếu tố (mà ta phải tìm cực trị) lớn hơn hoặc bé hơn yếu tố tương ứng trong hình đã đưa ra.

*Ví dụ 2:* Chứng minh rằng trong các tam giác có cùng đáy và diện tích, tam giác cân có chu vi nhỏ nhất.

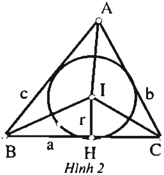
*Phân tích BT (hình 1):* Xét tam giác cân A'BC (hình 1) và một tam giác không cân ABC có đáy BC, các đỉnh A, A' chạy trên đường thẳng d//BC. Khi đó, ta cần chứng minh: chu vi của tam giác ABC lớn hơn chu vi của tam giác A'BC, nghĩa là AB + AC ≥ A'B + A'C (đã trình bày trong ví dụ 1).

***Phương pháp 3:*** Thay việc tìm cực đại của một đại lượng này bằng việc tìm cực tiểu của một đại lượng khác hoặc ngược lại.

*Ví dụ 3:* Chứng minh rằng trong các tam giác có chung đáy và cùng diện tích, tam giác cân có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

*Hướng dẫn (hình 2):* Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của $\Delta ABC$; r là bán kính đường tròn nội tiếp, S là diện tích $\Delta ABC$.

Ta có:



*Hình 2*

$$S = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA} = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{r}{2}(a+b+c)$$

$$\Rightarrow r = \frac{2S}{(a+b+c)}.$$

Vì S không đổi, suy ra r lớn nhất ⇔ (a + b + c) là nhỏ nhất. Theo kết quả *ở ví dụ 1*, tam giác có chu vi nhỏ nhất là tam giác cân.

*Nhận xét:* Để chứng minh bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác cân là lớn nhất, ta đưa về chứng minh chu vi của tam giác đó là nhỏ nhất (điều này đã được chứng minh ở ví dụ 1 bằng cách biểu thị bán kính đường tròn nội tiếp tam giác cân qua diện tích và chu vi của tam giác đó.

*Ví dụ 4:* Cho tam giác ABC vuông tại A. Phía ngoài tam giác vẽ hai nửa đường tròn có đường kính AB, AC. Một đường thẳng d quay quanh A cắt hai nửa đường tròn theo thứ tự tại M, N (khác A). Xác định hai điểm M, N sao cho chu vi tứ giác BCNM lớn nhất.

*Hướng dẫn (hình 3):* Đặt BM = x; AM = y; AN = z; NC = t, khi đó chu vi tứ giác BMNC là: BC + x + y + z + t.

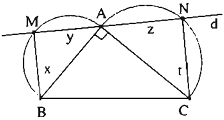
Với hai đại lượng a và b bất kì, ta luôn có:

$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ (*)

$\Delta AMB$ vuông tại M, theo định lí Pitago, ta có: $x^2 + y^2 = AB^2$. Áp dụng hệ thức (*): $(x + y)^2 \leq 2AB^2 \Leftrightarrow x + y \leq AB\sqrt{2}$; dấu "=" xảy ra khi x = y.

Tương tự: $z + t \leq AC\sqrt{2}$; dấu "=" xảy ra khi z = t. Với x = y thì M là điểm chính giữa của cung AB, khi đó $\Delta AMB$ vuông cân => $\angle MAB = 45^0 \Rightarrow \angle CAN = 45^0$ (vì M, A, N thẳng hàng).



*Hình 3*

Vậy, N là điểm chính giữa của cung AC hay chu vi tứ giác BCNM lớn nhất khi M, N đồng thời là điểm chính giữa của các cung AB, AC.

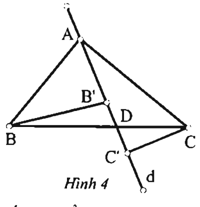
*Nhận xét:* Cần xác định vị trí của M, N để chu vi tứ giác BCNM lớn nhất. Do chu vi ABC không đổi nên chu vi của tứ giác BCMN chỉ phụ thuộc vào hai tam giác AMB và ANC, tức là phụ thuộc vào các đại lượng x + y và z + t. Từ đó, ta xác định được M, N thỏa mãn điều kiện của BT.

**4. Vận dụng kiến thức vào giải các BT CTHH**

Một số kiến thức thường dùng để giải BT cực trị trong hình học phẳng như: - Quan hệ giữa đường vuông góc, đường xiên và hình chiếu; - Quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác; bất đẳng thức trong tam giác; - Bất đẳng thức trong đường tròn; - Bất đẳng thức đại số; - Hệ thức lượng trong tam giác.

*Ví dụ 5:* Qua đỉnh A của tam giác ABC, dựng đường thẳng d sao cho tổng khoảng cách từ các đỉnh B và C tới d là nhỏ nhất.

*Hướng dẫn (hình 4):* Vận dụng kiến thức về mối quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, hình chiếu, ta có lời giải sau:



*Hình 4*

- *Trường hợp 1:* d cắt đoạn thẳng BC tại D. Với D bất kì trên đoạn thẳng BC, ta có: $S_{BAD} + S_{CAD} = S_{ABC} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}AD.BB' + \frac{1}{2}AD.CC' = S \Rightarrow BB' + CC' = \frac{2S}{AD}.$$

Suy ra (BB' + CC') nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{2S}{AD}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AD lớn nhất.

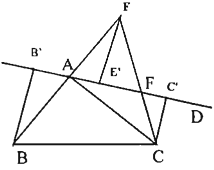
Giả sử AC $\geq$ AB thì trong hai đường xiên AD, AC, đường xiên AD có hình chiếu nhỏ hơn. Do đó, AD $\leq$ AC (hằng số); AD = AC $\Leftrightarrow$ D $\equiv$ C. Vậy, đường thẳng d phải dựng chứa cạnh lớn nhất trong hai cạnh AB, AC.

- *Trường hợp 2 (hình 5):* d không cắt đoạn thẳng BC. Lấy E đối xứng với B qua A, khi đó d $\cap$ CE = F. Hạ EE' $\perp$ d => BB' = EE'. Tương tự như trường hợp 1, ta có:

$$(BB' + CC') = \frac{2S_{ACE}}{AF}$$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AF lớn nhất.

Giả sử AC $\geq$ AB mà AF $\leq$ AC => AF = AC $\Leftrightarrow$ F $\equiv$ C.

Vậy, đường thẳng d phải dựng là đường thẳng chứa cạnh lớn nhất trong hai cạnh AB, AC.




*Hình 5*

Kết luận: Trong cả hai trường hợp đều dựng được đường thẳng d là đường thẳng chứa cạnh lớn nhất trong hai cạnh AB, AC của ABC.

**5. Một số bài tập luyện tập**

1) Cho nửa đường tròn đường kính AB. Một điểm M di động trên nửa đường tròn; kẻ MH $\perp$ AB. Xác định vị trí của M sao cho AH + HM là lớn nhất.

2) Cho tam giác ABC. Tìm điểm M ở trong tam giác ABC sao cho tổng các khoảng cách từ M đến các cạnh của $\Delta$ABC đạt giá trị nhỏ nhất.

3) Cho góc nhọn xAy và điểm A ở trong góc đó. Dựng một đường thẳng d cắt cạnh Ox tại M và cạnh Oy tại N sao cho diện tích $\Delta$AMN nhỏ nhất.

4) Cho $\Delta$ABC vuông cân tại A và M là trung điểm của BC. Từ đỉnh M vẽ góc $45^0$, các cạnh của góc này cắt hai cạnh của tam giác ở E và F. Hãy xác định vị trí của E và F sao cho diện tích $\Delta$MEF đạt giá trị lớn nhất.

5) Cho góc nhọn xOy, M là một điểm cố định nằm trong góc đó. A và B theo thứ tự là hai điểm thay đổi trên Ox và Oy sao cho 2OA = 3OB. Tìm vị trí của A và B sao cho tổng 2MA + 3MB nhỏ nhất.

6) Tìm kích thước của tam giác có diện tích lớn nhất nội tiếp trong đường tròn (O; R) cho trước.❑


**Tài liệu tham khảo**

1. Vũ Hữu Bình - Hồ Thu Hằng - Kiều Thu Hằng - Trịnh Thuý Hằng. **Các bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong hình học phẳng ở trung học cơ sở.** NXB *Giáo dục*, H. 2003.
2. Nguyễn Thái Hòe. **Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập Toán.** NXB *Giáo dục*, H. 2001.
3. Nguyễn Bá Kim. Phương pháp dạy học môn Toán. NXB *Đại học sư phạm*, H. 2002.
4. Trần Anh Tuấn. **Dạy học hình học ở trường trung học cơ sở theo hướng tổ chức các hoạt động hình học.** NXB *Đại học sư phạm*, H. 2005



SUMMARY

*The problem of finding the largest value, smallest in geometry called extreme geometry problem. The article mentions some types of extreme problems in geometry in secondary school curriculum and methods of solving the problems.*


## Những lỗi cơ bản học viên...


*(Tiếp theo trang 41)*


và nắm vững những yếu tố khu biệt để từ đó có sự chủ động, tự tin trong quá trình lĩnh hội và tiếp nhận một ngôn ngữ mới.

Với riêng học viên Lào, biết cách nhận diện và chủ động trong việc khắc phục những loại lỗi cơ bản liên quan đến phụ âm đầu như vừa nêu trên sẽ giúp cho họ rèn luyện kĩ năng nói đúng, viết đúng. Qua đó góp phần nâng chất lượng học tập tiếng Việt ngày một cao hơn.❑


**Tài liệu tham khảo**

1. Đoàn Thiện Thuật. **Ngữ âm tiếng Việt**. NXB *Đại học quốc gia Hà Nội*, 2002.
2. Nguyễn Trọng Khánh. *Danh ngữ tiếng Lào (trong mối quan hệ với tiếng Việt)*. Luận án tiến sĩ, Viện Ngôn ngữ học, 1998



SUMMARY

*As Vietnamese language learners, like many international students, Lao learners have to face great deal of barriers. It seems that every Vietnamese syllable is different from those in Lao phonetic systems. In this article, major mistakes commonly made by Lao students are discussed to find out the causes and ways of improvement. These mistakes are related to initial consonants in Vietnamese language. This article is written with an expectation that it partly helps improve effectiveness of teaching and learning Vietnamese for learners from Laos.*