Khái quát về lý thuyết ổn định cho hệ thống có trễ

An overview of stability theory for delayed systems

Ngày nhận bài: 21/3/2017
Ngày sửa bài: 11/4/2017
Ngày chấp nhận đăng: 02/5/2017

Nguyễn Thị Lan Hương

TÓM TẮT

Một trong những hướng nghiên cứu cơ bản của lý thuyết định tính phương trình vi phân là nghiên cứu sự ổn định của nghiệm, vì nó có nhiều ứng dụng trong thực tiễn.

Để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của phương trình vi phân, ta thường dùng hai phương pháp cơ bản là phương pháp xấp xỉ thứ nhất Lyapunov và phương pháp thứ hai Lyapunov (hay còn gọi là phương pháp hàm Lyapunov).Phương pháp hàm Lyapunov được áp dụng nhiều trong việc nghiên cứu định tính các hệ vi phân, nhất là các hệ phi tuyến. Tuy nhiên, việc xác định hàm Lyapunov nói chung là khó. Vì vậy, để nghiên cứu sự ổn định của một số phương trình vi phân, người ta còn sử dung phương pháp xấp xỉ thứ nhất Lyapunov.

Từ khóa: ổn định, trễ.

ABSTRACT

One of the basic research directions in the theory of differential equations is to study the stability of the solution, since it has many practical applications.

To study the stability of the solution of differential equations, we use two basic methods, the first approximation method of Lyapunov and the second one (or Lyapunov method). Lyapunov method is widely applied in the qualitative research of differential systems, especially nonlinear systems. However, defining the Lyapunov function is generally difficult. Thus, to study the stability of some differential equations, we often use the first approximation method Lyapunov.

Key words: stability, delay.

Nguyễn Thị Lan Hương: *Khoa Khoa học cơ bản – Trường Đại học Mỏ-Địa chất*

NỘI DUNG

I. SỰ ỔN ĐỊNH CỦA HỆ VI PHÂN TUYẾN TÍNH

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH

Xét hệ phương trình vi phân thường

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, y_2, \dots, y_n)(j = 1,2, \dots, n) \quad (1.1)$$

trong đó t là biến độc lập (thời gian); $y_1, \dots, y_n$ là các hàm cần tìm, f_j là các hàm xác định trong một bán trụ

$$T = I_t^+ \times D_y, I_t^+ = \{t_0 < t < +\infty\} \quad (1.2)$$

và D_y là một miền mở thuộc R^n. Ở đây t_0 là một số hoặc $(-\infty)$.

Để ngắn gọn ta gọi hệ (1.1) là hệ vi phân.

Dưới dạng ma trận – vectơ, ta có: $\frac{dY}{dt} = F(t, Y)$.

Giả thiết thêm rằng: hàm vectơ F(t, Y) trong miền T liên tục theo t và có các đạo hàm riêng cấp một theo các biến $y_1, \dots, y_n$ liên tục.

Định nghĩa 1.Nghiệm z = z(t) (a < t < ∞) của hệ (1.2) được gọi là ổn định theo Liapunov khi $t \to +\infty$ (hay ngắn gọn là ổn định), nếu với mọi ε> 0 và $t_0 \in (a, \infty)$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sao cho:

1) Tất cả các nghiệm Y = Y(t) của hệ (1.2) (bao gồm cả nghiệm Z(t)) thỏa mãn điều kiện: $\|Y(t_0) - Z(t_0)\| < \delta$ (1.3) xác định trong khoảng $t_0 < t < \infty$.

2) Đối với các nghiệm này, bất đẳng thức sau được thỏa mãn: $\|Y(t) - Z(t)\| < \varepsilon$ khi $t_0 \le t < \infty$ (1.4)

Định nghĩa 2.Nếu số δ> 0 có thể chọn không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu $t_0 \in G$, tức là $\delta = \delta(\varepsilon)$ thì ổn định được gọi là ổn định đều trong miền G

Định nghĩa 3.Nghiệm Z = Z(t) (a < t < ∞) được gọi là không ổn định theo Liapunov, nếu với ε> 0, $t_0 \in (a, \infty)$ nào đó và với mọi δ> 0 tồn tại nghiệm $Y_\delta(t)$ (ít nhất là một) và thời điểm $t_1 = t_1(\delta) > t_0$ sao cho

$\| Y_\delta(t_0) - Z(t_0)\| < \delta$ và $\| Y_\delta(t_1) - Z(t_0) \| \ge \varepsilon$

Định nghĩa 4.Nghiệm Z = Z(t) (a < t < ∞) được gọi là ổn định tiệm cận khi $t \to +\infty$ nếu

1) Nó ổn định theo Liapunov và

2) Với mọi $t_0 \in (a, \infty)$ tồn tại $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ sao cho mọi nghiệm Y(t) ($t_0 \le t < \infty$) thỏa mãn điều kiện $\| Y_\delta(t_0) - Z(t_0)\| < \Delta$ sẽ có tính chất $\lim_{t\to\infty} \|Y(t) - Z(t)\| = 0$ (1.5).

Định nghĩa 5.Giả sử hệ (1.2) xác định trong nửa không gian $\Omega = \{t_0 < t < \infty\} \times \{\|Y\| < \infty\}$. Nếu nghiệm Z = Z(t) (a < t < ∞) ổn định tiệm cận khi $t \to \infty$ và tất cả các nghiệm Y = Y(t) ($t_0 \le t < \infty$, $t_0 > a$) đều có tính chất (1.5), tức là $\Delta = \infty$, thì Z(t) được gọi là ổn định tiệm cận toàn cục

Định nghĩa 6.Nghiệm Z = Z(t) (a < t < ∞) của hệ (1.2) được gọi là ổn định dưới tác động của nhiễu $\Phi(t, \tilde{Y})$ nếu với mọi ε> 0 và $t_0 \in (a, \infty)$ tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sao cho khi $\|\Phi(t, \tilde{Y})\| < \delta$ tất cả các nghiệm $\tilde{Y}(t)$ của hệ (1.6) thỏa mãn điều kiện $\|\tilde{Y}(t_0)\| < \delta$ sẽ xác định trong khoảng $[t_0, \infty)$ và $\|\tilde{Y}(t) - Z(t)\| < \varepsilon$ với $t_0 \le t < \infty$.

2. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ VI PHÂN TUYẾN TÍNH

Xét hệ vi phân tuyến tính

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)y_k + f_j(t) \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad (2.1)$$

Trong đó các hệ số $a_{jk}(t)$ và các số hạng tự do $f_j(t)$ liên tục trong khoảng (a, ∞), ở đây a có thể là một số hoặc $(-\infty)$.

Dưới dạng ma trận – vectơ, hệ (2.1) có thể viết

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t) \qquad (2.2)$$

trong đó ma trận A(t) và vectơ F(t) liên tục trong khoảng (a, ∞).

Giả sử $X(t) = [x_{jk}(t)] \quad (\det X(t) \neq 0)$ (2.3)

là ma trận nghiệm cơ bản của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng

$$\frac{d\tilde{Y}}{dt} = A(t)\tilde{Y} \qquad (2.4)$$

Định nghĩa 1. Hệ vi phân tuyến tính (2.2) được gọi là ổn định (hoặc không ổn định) nếu tất cả các nghiệm Y = Y(t) của nó tương ứng ổn định (hoặc không ổn định) theo Liapunov khi $t \to +\infty$.

Định nghĩa 2. Hệ vi phân tuyến tính (2.2) được gọi là ổn định đều nếu tất cả các nghiệm Y(t) của nó ổn định đều khi $t \to +\infty$ đối với thời điểm ban đầu t_0 (a, ∞).

Định nghĩa 3. Hệ vi phân tuyến tính (2.2) được gọi là ổn định tiệm cận nếu tất cả các nghiệm của nó ổn định tiệm cận khi $t \to +\infty$.

MỘT SỐ KẾT QUẢ

Định lý 1. Điều kiện cần và đủ để hệ vi phân tuyến tính (2.2) ổn định với số hạng tự do bất kỳ F(t) là nghiệm tầm thường

$$\tilde{Y}_0 \equiv 0 \; (t_0 < t < \infty), t_0 \in (a, \infty)$$

của hệ thuần nhất tương ứng (2.4) ổn định

Định lý 2. Hệ vi phân tuyến tính (2.2) ổn định đều khi và chỉ khi nghiệm tầm thường $\tilde{Y}_0 \equiv 0$ của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng (2.4) ổn định đều khi $t \to \infty$.

Định lý 3. Hệ vi phân tuyến tính (2.2) ổn định tiệm cận khi và chỉ khi nghiệm tầm thường $\tilde{Y}_0 \equiv 0$ của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng (2.4) ổn định tiệm cận khi $t \to +\infty$.

Hệ quả 1. Hệ vi phân tuyến tính ổn định khi ít ra một nghiệm của nó ổn định và không ổn định nếu một nghiệm nào đó của nó không ổn định.

Hệ quả 2. Hệ vi phân tuyến tính ổn định khi và chỉ khi hệ vi phân thuần nhất tương ứng ổn định.

Hệ quả 3. Điều kiện cần và đủ để hệ vi phân tuyến tính (2.2) với số hạng tự do F(t) bất kỳ ổn định tiệm cận là hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng (2.4) ổn định

3. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ VI PHÂN TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Xét hệ vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y \qquad (3.1)$$

trong đó A(t) liên tục trong khoảng (a, ∞).

Định lý 1. Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất (3.1) ổn định theo Liapunov khi và chỉ khi mỗi nghiệm Y = Y(t) $(t_0 \leq t < \infty)$ của hệ đó bị chặn trên nửa trục $t_0 \leq t < \infty$.

Định lý 2. Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất (3.1) ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tất cả các nghiệm Y = Y(t) của nó dần tới không khi $t \to +\infty$, tức là: $\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0$ (3.2)

Hệ quả. Hệ vi phân tuyến tính ổn định tiệm cận sẽ ổn định toàn cục

4. ỔN ĐỊNH CỦA HỆ VI PHÂN TUYẾN TÍNH VỚI MA TRẬN HẰNG

Xét hệ $\frac{dY}{dt} = AY$ (4.1)

trong đó $A = [a_{jk}]$ là ma trận hằng (n x n).

Định lý 1. Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất (4.1) với ma trận hằng A ổn định khi và chỉ khi tất cả các nghiệm đặc trưng $\lambda_j = \lambda_j(A)$ của A đều có phần thực không dương

$\operatorname{Re} \lambda_j(A) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

và các nghiệm đặc trưng có các phần thực bằng không đều có ước cơ bản đơn.

Định lý 2. Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất (4.1) với ma trận hằng A ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tất cả các nghiệm đặc trưng $\lambda_j = \lambda_j(A)$ của A đều có phần thực âm, tức là

$\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

II. SỰ ỔN ĐỊNH CỦA PTVP TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Giả sử H là không gian Hilbert tách được

$D = \{(t, x) \in (a, b) \times H: |t - t_0| \leq T; \|x - x_0\| \leq r\}$

Xét phương trình vi phân: $\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$ (2.1)

trong đó $t \in R^+$; $x \subset H$; f. D→H là một hàm liên tục thỏa mãn f(t,0) = 0 và thỏa mãn điều kiện Lipschitz, tức là tồn tại L > 0 sao cho:

với mọi $(t, x_1), (t, x_2) \in D$ thì $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L.\|x_1 - x_2\|$.

Ký hiệu: $G = \{x: x \in H, \|x\| \leq h \leq r < +\infty\}$

$x(t) = x(t, t_0, x_0)$ là nghiệm của phương trình (2.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$ $(x_0 \in G)$

Định nghĩa 1. Nghiệm tầm thường $x(t) = 0$ của phương trình vi phân (2.1) được gọi là ổn định theo Liapunov khi $t \to +\infty$ nếu

$\forall \varepsilon > 0, t_0 \in R^+; \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0: \forall x_0 \in G: \|x_0\| < \delta \to \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \, \forall t \geq t_0$

Định nghĩa 2. Nghiệm tầm thường x(t) = 0 của phương trình vi phân (2.1) được gọi là ổn định đều theo Liapunov khi nếu số δ trong định nghĩa 1 không phụ thuộc vào t_0

Định nghĩa 3. Nghiệm tầm thường $x(t) \equiv 0$ của phương trình vi phân (2.1) được gọi là ổn định tiệm cận khi $t \to \infty$ nếu:

i) Nghiệm tầm thường $x(t) \equiv 0$ là ổn định;

ii) Tồn tại $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ sao cho với mọi $x_0 \in G$ và $\|x_0\| < \Delta$ thì: $\lim_{t \to +\infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0$

Định nghĩa 4. Nghiệm tầm thường $x(t) \equiv 0$ của phương trình vi phân (2.1) được gọi là ổn định tiệm cận đều nếu:

i) Nghiệm $x(t) \equiv 0$ là ổn định đều;

ii) Tồn tại Δ > 0 (không phụ thuộc vào t_0) sao cho với mọi $x_0 \in G$ và $\|x_0\| < \Delta$ thì:

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0.$$

Định nghĩa 5. Nghiệm tầm thường $x(t) \equiv 0$ của phương trình vi phân (2.1) được gọi là ổn định mũ khi $t \to \infty$ nếu mọi nghiệm $x = x(t, t_0, x_0)$ của (2.1) thỏa mãn

$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq B.\|x_0\|.e^{-\alpha(t-t_0)}$

Trong đó B, α là hằng số dương nào đó không phụ thuộc vào (t_0, x_0).

III. SỰ ỔN ĐỊNH CỦA PTVP THEO PHƯƠNG PHÁP HÀM LYAPUNOV

Định nghĩa 1. Ta nói phiếm hàm $V: R^+ \times H \to R^+$ là phiếm hàm Lyapunov nếu nó liên tục và thoản mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ 2.

Đạo hàm phải của V dọc theo nghiệm của (2.1), ký hiệu là $\dot{V}(t, x)$ được xác định bởi

$$\dot{V}(t, x) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h}\{V[t + h, x + hf(t, x)] - V(t, x)\}$$

Ký hiệu CIP: Họ các hàm tăng, liên tục, xác định dương.

Định lý 1. Giả sử tồn tại phiếm hàm liên tục Lyapunov $V: R^+ \times H \to R^+$ và hàm $a(.) \in$ CIP thỏa mãn các điều kiện

i) V(t, 0) = 0

ii) $a(\|x\|) \leq V(t,x)$

iii) $\dot{V}(t, x) \leq 0$

Khi đó nghiệm tầm thường $x \equiv 0$ của phương trình (2.1) là ổn định.

Định lý 2. Giả sử tồn tại phiếm hàm liên tục Lyapunov $V: R^+ \times H \to R^+$ và các hàm $a(.), b(.) \in$ CIP thỏa mãn các điều kiện

i) $a(\|x\|) \leq V(t,x) \leq b(\|x\|)$

ii) $\dot{V}(t, x) \leq 0$

Khi đó nghiệm tầm thường x = 0 của phương trình (2.1) là ổn định đều.

Định lý 3. Giả sử tồn tại phiếm hàm liên tục Lyapunov V: $R^{+} \times H \to R^{+}$ và các hàm a( ), b(.), c(.) ∈ CIP thỏa mãn các điều kiện

i) $a(||x||) \le V(t,x) \le b(||x||)$

ii) $\dot{V}(t,x) \le -c(||x||)$

Khi đó nghiệm tầm thường x = 0 của phương trình (2.1) là ổn định tiệm cận đều.

IV. SỰ ỔN ĐỊNH CỦA PTVP TUYẾN TÍNH VÀ TUYẾN TÍNH CÓ NHIỄU TRONG KHÔNG GIAN HILBERT THEO PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ THỨ NHẤT LYAPUNOV

1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Giả sử H là không gian Hilbert.

Trong H xét phương trình $\frac{dx}{dt} = A(t)$ (4.1)

Giả sử toán tử A(t) với mỗi giá trị cố định của t là một toán tử tuyến tính giới nội và hàm toán tử A(t) liên tục theo t khi $t \ge 0$.

Do đó, phương trình (4.1) thỏa mãn điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm với bài toán giá trị ban đầu, tất cả các nghiệm của phương trình này đều thác triển không giới nội được trên nửa khoảng thời gian vô hạn.

Trong L(H) ta xét phương trình $\dot{U} = A(t)U$ (4.2)

trong đó U(t) là hàm toán tử lấy giá trị trong L(H). Giả sử U(t) là nghiệm của phương trình (4.2) thỏa mãn điều kiện U(0) = I, khi đó tồn tại hàm ngược $U^{-1}(t)$.

Đặt $W(t, t_0) = U(t)U^{-1}(t_0)$ thì $W(t, t_0)$ được gọi là toán tử Cauchy của phương trình (4.1) $W(t, t_0)$ có tính chất $W(t, t_1)W(t_1, t_0) = W(t, t_0)$. Nghiệm của phương trình (4.1) thỏa mãn điều kiện $x(t_0) = x_0$ có thể viết được dưới dạng $x(t) = W(t, t_0)x_0$.

Trong trường hợp đặc biệt, khi A(t) = A, A ∈L(H), ta sẽ chỉ ra $U(t) = e^{At}$ Toán tử mũ e^{At} được xác định như sau

Định nghĩa 1. Với A là toán tử tuyến tính giới nội trên không gian Hilbert H, ta định nghĩa

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

với mỗi $t \ge 0$. (Quy ước $0^0 = I$)

Xét phương trình vi phân tuyến tính trong không gian Hilbert H.

$\dot{X}(t) = Ax(t), x(t) \in X, t \ge 0$ (4.3)

với A: H → H là toán tử tuyến tính giới nội. Khi đó, $e^{tA}x_0$ là nghiệm của phương trình (4.3) thỏa mãn điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$.

Định lý 1. Nghiệm tầm thường x = 0 của phương trình (4.3) ổn định mũ nếu một trong các mệnh đề sau được thỏa mãn.

i) $r(e^{A}) < 1$, ở đây $r(e^{A})$ là bán kính phổ của toán tử e^{A}.

ii) $\sigma(A) \subset \{z \in C; Re z < 0\}$.

2. SỰ ỔN ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CÓ NHIỄU TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Giả sử $W(t, t_0) = U(t)U^{-1}(t_0)$ là toán tử Cauchy của phương trình (4.1). Dễ thấy, nếu có bất đẳng thức

$$||W(t, t_0)|| \le Be^{-\alpha(t-t_0)} \quad (4.4)$$

trong đó B, α là hằng số dương nào đó, không phụ thuộc vào t_0 thì đây là điều kiện để nghiệm tầm thường x = 0 của phương trình (4.1) ổn định theo số mũ.

Tương ứng với phương trình thuần nhất (4.1), ta xét phương trình không thuần nhất

$$\frac{dx}{dt} = A(t) + u(t) \quad (4.5)$$

trong đó u(t) là hàm lấy giá trị trong H.

Nghiệm của phương trình này có thể nhận được theo công thức Cauchy

$$x(t) = W(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} W(t,s)u(s)ds$$

mà ta có thể dễ dàng nghiệm lại bằng cách thử trực tiếp.

Xét phương trình

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + R(t,x(t)) \quad (4.6)$$

trong đó A(t) là toán tử tuyến tính giới nội, liên tục theo t; R(t, x(t)) là hàm thỏa mãn điều kiện R(t, 0) = 0 và

$$||R(t, x)|| \le L||x|| \text{ trong miền G} \quad (4.7)$$

Định lý 1. Nếu điều kiện (4.4) và (4.7) được thỏa mãn và ngoài ra nếu các hằng số α, B, L thỏa mãn bất đẳng thức

$$\lambda = \alpha - BL > 0 \quad (4.8)$$

thì nghiệm tầm thường x = 0 của phương trình (4.6) sẽ ổn định mũ.

Định lý 2. Giả sử bất đẳng thức (4.7) được thỏa mãn và có bất đẳng thức $||F(t)|| \le L$ $(0 \le t < \infty)$ Ngoài ra, nếu các đại lượng α, B, L thỏa mãn điều kiện (4.8) thì nghiệm tầm thường x = 0 của phương trình

$$\frac{dx}{dt} = (A(t) + F(t))x$$

ổn định theo số mũ.

Định lý 3. Giả sử H là không gian Hilbert Xét phương trình

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \psi(t,x) + g(t,x) \quad (4.9)$$

trong đó ψ, g: $R^{+} \times H \to H$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $||\psi(t, x)|| \le L||x||$, $\psi(t, 0) = 0$;

ii) $||g(t, x)|| \le \varphi(t)||x||$, $g(t,0) = 0$, $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt < +\infty$

Ký hiệu W(t, s) là toán tử Cauchy của phương trình $\frac{dx}{dt} = A(t)x$.

Khi đó nếu tồn tại các số dương c và λ sao cho: $||W(t, s)|| \le c\, e^{-\lambda(t-s)}$, $\forall t \ge s \ge 0$

thì nghiệm x(t) = 0 của phương trình (4.9) ổn định tiệm cận nếu $cL < \lambda$.

KẾT LUẬN

Bài viết muốn giới thiệu với bạn đọc những khái niệm cơ bản và một số kết quả kinh điển nhất của lý thuyết ổn định, giúp cho bạn đọc có được cái nhìn tổng quan về lý thuyết này, đặc biệt là đối với những hệ thống có trễ. Các kết quả mở rộng hơn sẽ được tìm hiểu và giới thiệu trong các bài báotiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phu, *Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*, NXB Giáo dục, 2003.

[2] Zong G.D., Wu Y.Q. (2004), "*Exponential stability of a class of switched and hybrid systems*", In: Proc. IEEE on Control Aut. Robotics and Vision, 3, pp. 2244 - 2249.

[3] Zairong X., Feng G., Jiang Z.P., Cheng D. (2003), "*A switching algorithm for global exponential stabilization of uncertain chained systems*", IEEE Trans. Automat. Control, 48(10), pp. 1793 - 1798

[4] Lien C.H., Yu K.W., Chung Y.J., Chang H.C., Chung L.Y., Chen J.D. (2011), "*Switched signal design for global exponential stability of uncertain switched nonlinear systems with time-varying delays*", Nonlinear Anal. Hybrid Syst., 5(1), pp. 10 - 19

[5] Ratchagit K., Phat V.N. (2011), "*Stability and stabilization of switched linear discrete-time systems with interval time-varying delay*", Nonlinear Anal. Hybrid Syst., 5(4), pp. 605 - 612.