

# XÁC ĐỊNH ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA THÉP KẾT CẤU SỬ DỤNG KẾT HỢP NANOINDENTATION VỚI MŨI KIM CẦU VÀ BERKOVICH

Nguyễn Ngọc Vinh<sup>a</sup>, Phạm Thái Hoàn<sup>b</sup>, Nguyễn Đăng Nguyễn<sup>b,\*</sup>

<sup>a</sup>Chương trình Kỹ thuật hạ tầng, Trường đại học Việt Nhật, Đại học Quốc gia Hà Nội, đường Lưu Hữu Phước, phường Cầu Diễn, quận Nam Từ Liêm, Hà Nội, Việt Nam

<sup>b</sup>Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 11/10/2021, Sửa xong 08/12/2021, Chấp nhận đăng 27/12/2021

## Tóm tắt

Bài báo này đề xuất phương pháp mới cho phép xác định tính chất cơ học của thép kết cấu, là loại vật liệu mà đường cong ứng suất - biến dạng có thêm chảy dẻo, bằng cách kết hợp thí nghiệm nanoindentation với hai loại mũi kim Berkovich và mũi kim cầu dựa trên kết quả phân tích hàm không thứ nguyên và mô phỏng phần tử hữu hạn (PTHH). Phương pháp đề xuất cho phép xác định đảm bảo tính duy nhất của kết quả cũng như được chứng minh là đúng đắn và đáng tin cậy. Kết quả kiểm chứng từ 9 cặp thí nghiệm nanoindentation với hai loại mũi kim là mũi Berkovich và mũi cầu trên hai loại thép kết cấu phổ biến SS400 và SM490 cho thấy các đặc trưng cơ học bao gồm  $\sigma_y$ ,  $n$ ,  $\alpha$  được xác định từ phương pháp đề xuất một cách duy nhất với sai số dưới 10%.

*Từ khóa:* thép kết cấu; nanoindentation; đặc trưng cơ học; PTHH; hàm không thứ nguyên.

BERKOVICH AND SPHERICAL NANOINDENTATION FOR DETERMINATION OF MECHANICAL CHARACTERISTICS OF STRUCTURAL STEELS

## Abstract

This study presents a novel method for determination of mechanical characteristics of structural steels, which exhibit a plastic plateau in their stress-strain curve, from dual Berkovich and spherical nanoindentation based on the dimensionless analysis and finite element simulation. The proposed method allows to determine a unique solution and it has been demonstrated to be accurate and reliable. The results obtained from nine couple nanoindentation tests with Berkovich and spherical tips on two common structural steels SS400 and SM490 indicate that the proposed method provides a unique set of mechanical characteristics of  $\sigma_y$ ,  $n$ ,  $\alpha$  with relative error less than 10

*Keywords:* structural steel; nanoindentation; mechanical characteristics; FE analysis; dimensionless function.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce\(nuce\)2022-16\(1V\)-06](https://doi.org/10.31814/stce.huce(nuce)2022-16(1V)-06) © 2022 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

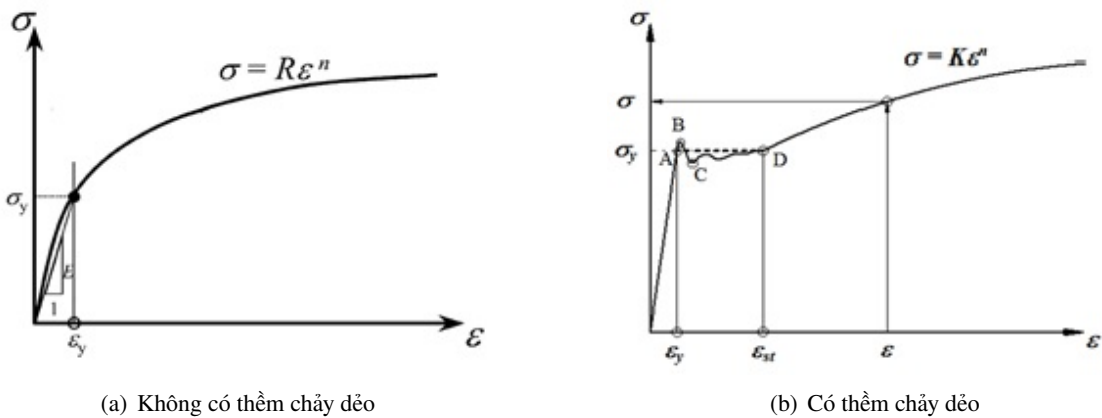
## 1. Giới thiệu

Nanoindentation là một thí nghiệm hiện đại tiến hành bằng cách ấn (indent) một mũi kim (indenter) rất cứng (thường bằng kim cương) có hình dạng cho trước vào bề mặt phẳng của vật liệu và kết quả thí nghiệm là đường cong quan hệ lực ấn – độ sâu (đường cong  $P-h$ ), vết lõm trên bề mặt vật liệu trong cả quá trình gia tải (loading) và dỡ tải (unloading). Nanoindentation được sử dụng trong nhiều

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [nguyend@huce.edu.vn](mailto:nguyend@huce.edu.vn) (Nguyễn, N. Đ.)

lĩnh vực kỹ thuật trong hai thập kỷ qua nhờ các ưu điểm như đơn giản, chính xác, không phá hủy mẫu, khả năng áp dụng cao và thuận tiện ở các kích thước và tỷ lệ mẫu khác nhau. Nhiệm vụ chính của phân tích kết quả thí nghiệm là tìm ra mối liên hệ giữa tính chất của vật liệu thí nghiệm, tính chất và kích thước hình học của mũi kim thông qua đường cong  $P-h$  để từ đó có thể xác định được đặc trưng cơ học của vật liệu thí nghiệm một khi các thông số khác của mũi kim đã được biết [1]. Có rất nhiều loại hình dáng mũi kim được sử dụng trong công nghệ Nanoindentation như mũi kim hình kim tự tháp 3 mặt phẳng (Berkovich), mũi kim hình kim tự tháp 4 mặt phẳng (Vickers), mũi kim hình nón (cone), mũi kim cầu (sphere), ... [2]. Trong khi phương pháp xác định modun đàn hồi của vật liệu từ phép đo nanoindentation với các loại mũi kim khác nhau đã được thiết lập và sử dụng rộng rãi [3, 4], rất nhiều nghiên cứu đã đề xuất các phương pháp khác nhau nhằm xác định tính chất dẻo của vật liệu từ phép đo này [5–10], trong đó chủ yếu sử dụng hàm không thứ nguyên để biểu diễn mối quan hệ giữa tính chất vật liệu và các thông số của đường cong  $P-h$  thu được từ phép đo. Tuy nhiên, các phương pháp này chỉ áp dụng được cho vật liệu mà đường cong ứng suất-biến dạng có thể biểu diễn tương đối chính xác dưới dạng một hàm mũ, như Hình 1(a) và biểu thức (1) dưới đây [5–10]:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & (\varepsilon \leq \varepsilon_y) \\ \sigma_y [1 + E(\varepsilon - \varepsilon_y)/\sigma_y]^n & (\varepsilon \geq \varepsilon_y) \end{cases} \quad (1)$$



Hình 1. Quan hệ ứng suất – biến dạng của vật liệu

Thép kết cấu là một trong những vật liệu được sử dụng rất nhiều trong xây dựng dân dụng và công nghiệp. Không giống với các kim loại và hợp kim khác mà quan hệ ứng suất – biến dạng được biểu diễn như biểu thức (1), thép kết cấu là loại vật liệu mà đường cong ứng suất - biến dạng có thêm chảy dẻo bắt đầu từ điểm B và kết thúc ở điểm D như đường nét liền giữa hai điểm này trong Hình 1(b). Trong tính toán và nghiên cứu, thêm chảy dẻo này được giả thiết là 1 đoạn thẳng, là đường nét đứt nối từ A đến D trong Hình 1(b). Giả thiết này được chấp nhận rộng rãi và vẫn phản ánh đúng sự làm việc của thép kết cấu [11, 12]. Với giả thiết đó, đường cong ứng suất biến dạng của thép kết cấu có thể biểu diễn như sau [11, 12]:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & (\varepsilon \leq \varepsilon_y) \\ \sigma_y & (\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_{st}) \\ \sigma_y [1 + E(\varepsilon - \varepsilon_{st})/(\alpha\sigma_y)]^n & (\varepsilon \geq \varepsilon_{st}) \end{cases} \quad (2)$$

trong đó hệ số  $\alpha$  là tỷ số giữa biến dạng tại điểm bắt đầu cứng hóa ( $\varepsilon_{st}$ ) và biến dạng dẻo ( $\varepsilon_y$ ), có giá trị nằm trong khoảng từ 1-23 với các thép kết cấu phổ biến [13].

Trên cơ sở mô hình vật liệu của thép kết cấu theo biểu diễn (2), các phương pháp để xác định đặc trưng cơ học của vật liệu này từ một thí nghiệm nanoindentation với từng loại mũi kim khác nhau đã được đề xuất [14–17]. Các phương pháp đề xuất trên được áp dụng để khảo sát đặc trưng cơ học như mô đun đàn hồi (elastic modulus  $E$ ), độ cứng (hardness  $H$ ), cường độ chảy dẻo (yield strength  $\sigma_y$ ), chỉ số cứng hóa theo biến dạng (strain hardening exponent  $n$ ), hệ số  $\alpha$ , thành phần ứng suất dư (residual stress  $\sigma_R$ ) ở tốc độ gia tải bình thường (tĩnh) và tốc độ gia tải cao của các loại thép kết cấu phổ biến [18–21]. Trong số này, hai phương pháp được đề xuất bởi Phạm và cs. [14, 16] cho phép ước lượng  $\sigma_y$  và  $n$  từ một thí nghiệm nanoindentation sau khi xác định được  $E$  cùng từ kết quả thí nghiệm này bằng phương pháp phổ biến đề xuất bởi Oliver và Pharr [4]. Phương pháp được đề xuất trong tài liệu [14] cho phép ước lượng khoảng của  $\sigma_y$  và  $n$  từ một thí nghiệm nanoindentation mũi kim Berkovich và cho phép xác định được giá trị của  $\sigma_y$  và  $n$  nếu đã biết trước hệ số  $\alpha$ . Trong áp dụng, hệ số  $\alpha$  có thể được xác định với sự hỗ trợ của mô phỏng phần tử hữu hạn (PTHH) như được thể hiện trong các tài liệu [22–24]. Tuy nhiên việc xác định hệ số  $\alpha$  thông qua mô phỏng PTHH cũng phức tạp và cho độ chính xác không cao do phụ thuộc vào nhiều giả thiết trong quá trình tính toán. Phương pháp được đề xuất trong tài liệu [16] cho phép xác định  $\sigma_y$ ,  $n$ , và  $\alpha$  từ một thí nghiệm nanoindentation mũi kim cầu, tuy nhiên kết quả thu được trong một số trường hợp cho sai số đến gần 15%. Muốn thu được kết quả chính xác hơn cần thực hiện nhiều thí nghiệm để lấy giá trị trung bình. Ngoài ra, xác định đặc trưng cơ học của vật liệu từ một thí nghiệm nanoindentation được cho là đối diện với nguy cơ không thu được kết quả duy nhất như đã được phân tích trong các tài liệu công bố trước đây [25–28]. Nhằm khắc phục những hạn chế trên của các phương pháp trên, nghiên cứu này đề xuất phương pháp xác định đặc trưng cơ học của thép kết cấu, bao gồm cường độ chảy dẻo  $\sigma_y$ , chỉ số cứng hóa theo biến dạng  $n$ , và hệ số  $\alpha$ , kết hợp thí nghiệm nanoindentation với cả hai loại mũi kim Berkovich và mũi kim cầu. Trên cơ sở hai phương pháp được đề xuất trong các nghiên cứu [14, 16], phương pháp đường chuẩn được đề xuất bởi Phadikar và cs. [27] được hiệu chỉnh để áp dụng vào dữ liệu thu được từ 2 thí nghiệm với hai mũi kim khác nhau nhằm xác định được các đặc trưng cơ học của vật liệu một cách duy nhất và chính xác.

## 2. Lý thuyết cơ bản và nguyên lý xác định đặc trưng cơ học của thép kết cấu từ 1 thí nghiệm nanoindentation

### 2.1. Lý thuyết cơ bản

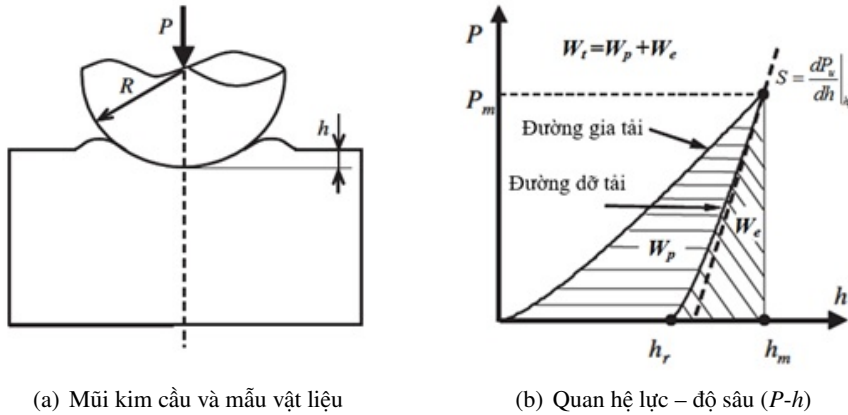
Hình 2 phác họa thí nghiệm nanoindentation với mũi kim cầu và đường cong lực – độ sâu ( $P-h$ ) tạo nên trên bề mặt vật liệu ứng với quá trình gia tải và dỡ tải trong thí nghiệm nanoindentation. Đường cong  $P-h$  cung cấp nhiều dữ liệu phản ánh mối liên hệ giữa đặc trưng cơ học của vật liệu được thí nghiệm và mũi kim, từ đó có thể xác định được đặc trưng cơ học của vật liệu một khi các mối liên hệ ứng với mỗi loại mũi kim được xác định.

Từ đường cong  $P-h$ , có thể xác định mô đun đàn hồi của mẫu vật liệu thí nghiệm  $E$  dựa trên các mối quan hệ sau [3, 4]:

$$E_r = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \frac{S}{\sqrt{A_c}} \quad (3)$$

$$E_r = \left[ \frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} \right]^{-1} \quad (4)$$

trong đó  $\beta$  là hệ số liên quan đến hình dạng của mũi kim ( $\beta = 1,034$  với mũi kim Berkovich và  $\beta = 1,050$  với mũi kim cầu);  $E_r$  là mô đun giảm kể đến mối liên hệ giữa vật liệu mũi kim và mẫu;  $A_c$  là hình chiếu của diện tích tiếp xúc;  $E_i, \nu_i, E$ , và  $\nu$  lần lượt là mô đun đàn hồi và hệ số Poát-xông của vật liệu mũi kim và mẫu.



(a) Mũi kim cầu và mẫu vật liệu

(b) Quan hệ lực – độ sâu ( $P-h$ )

Hình 2. Minh họa thí nghiệm nanoindentation và kết quả thu được

Độ cứng tiếp xúc  $S$  có thể được xác định theo biểu thức sau [3]:

$$S = \left. \frac{dP_u}{dh} \right|_{h_m} = mB(h_m - h_r)^{m-1} \quad (5)$$

trong đó khoảng 2/3 (67%) phần trên của đường cong dỡ tải  $P_u$  được chứng minh có thể biểu diễn gần như chính xác bằng một hàm số mũ dạng với  $P_u = B(h - h_r)^m$ . Trong biểu thức (5),  $h_m$  và  $h_r$  lần lượt là chiều sâu bị ấn vào lớn nhất (maximum penetration depth) và chiều sâu vết lõm còn lại trên bề mặt vật liệu sau khi dỡ tải (residual impression depth),  $B$  và  $m$  là các hệ số của hàm mũ.

Hình chiếu của diện tích tiếp xúc  $A_c$  được xác định phụ thuộc vào loại mũi kim như sau [3, 4]:

- Với mũi kim cầu,  $A_c = \pi(2Rh_c - h_c^2)$  với  $R$  là bán kính mũi kim cầu và  $h_c = (h_m + h_r)/2$  là chiều sâu tiếp xúc (contact depth).

- Với mũi kim Berkovich,  $A_c = 24,5h_c^2$  với chiều sâu tiếp xúc  $h_c = h_m - 0,75P_m/S$ .

Trong khi phương pháp xác định mô đun đàn hồi từ thí nghiệm nanoindentation được công nhận và có thể áp dụng chính xác cho hầu hết mọi loại vật liệu [1, 2], các đặc trưng cơ học khác của vật liệu thường được xác định bằng cách phân tích mối quan hệ giữa chúng và các thông số thu được từ đường cong  $P-h$ . Các mối quan hệ thường được biểu diễn dưới dạng các hàm số không thứ nguyên. Đối với thép kết cấu, vật liệu được đặc trưng bởi các thông số  $E, \nu, \sigma_y, n, \alpha$ , bằng cách sử dụng lý thuyết  $\Pi$  trong phân tích hàm số [29], các hàm không thứ nguyên ứng với mũi kim Berkovich và mũi kim cầu đã được xây trong các nghiên cứu trước đây [14, 16].

## 2.2. Nguyên lý xác định đặc trưng cơ học của thép kết cấu từ một thí nghiệm nanoindentation

Các đặc trưng cơ học của vật liệu mẫu có thể được xác định thông qua thông số thu được từ đường cong  $P-h$  một khi mối quan hệ giữa chúng, chính là các hàm không thứ nguyên được thiết lập. Các hàm không thứ nguyên này thường được thiết lập bằng cách tạo một bộ dữ liệu tương đối lớn về mối quan hệ giữa các đặc trưng cơ học của vật liệu (gọi là dữ liệu đầu vào) và các thông số thu được từ đường cong  $P-h$  tương ứng (gọi là dữ liệu đầu ra). Các dữ liệu này sẽ khớp với các hàm số phù hợp

(fitting functions) nhất định, và với số lượng dữ liệu đủ lớn thì các hàm số phù hợp này có thể coi là các hàm không thứ nguyên như phân tích ở trên. Để tạo được bộ dữ liệu với số lượng lớn, có thể tiến hành thí nghiệm nanoindentation trên rất nhiều mẫu vật liệu với các đặc trưng cơ học khác nhau. Tuy nhiên đây là cách làm rất tốn kém và cũng như khó để có thể tìm được các vật liệu với dải phân bố các đặc trưng cơ học đủ rộng để hàm không thứ nguyên thu được có tính phổ quát cao. Vì vậy các dữ liệu này thường được tạo thông qua mô phỏng phần tử hữu hạn (PTHH). Phần mềm PTHH sẽ được sử dụng để mô phỏng thí nghiệm nanoindentation trên vật liệu mẫu. Một khi mô hình mô phỏng được kiểm chứng có thể mô hình hóa chính xác thí nghiệm, mô hình này sẽ được dùng để tạo bộ dữ liệu bằng cách mô phỏng thí nghiệm trên các vật liệu với đặc trưng cơ học khác nhau. Ứng với mỗi bộ giá trị đặc trưng cơ học, kết quả phân tích mô hình sẽ là một đường cong  $P-h$ , từ đó thu được một bộ đầu ra là các thông số của đường cong này.

Dựa trên nguyên lý đó, Pham và cs. [14] đã sử dụng phần mềm Abaqus, phần mềm hữu hiệu trong phân tích ứng xử của vật liệu và kết cấu [30, 31], để mô phỏng thí nghiệm nanoindentation với mũi kim Berkovich trên vật liệu thép kết cấu để thiết lập các hàm không thứ nguyên. Mô hình mô phỏng thí nghiệm nanoindentation bằng phần mềm Abaqus và kết quả kiểm chứng độ tin cậy của mô hình trên hai loại thép kết cấu phổ biến là SS400 và SM490 được trình bày chi tiết trong tài liệu tham khảo [14]. Mô hình sau đó được sử dụng để tạo một bộ gồm 576 dữ liệu liên hệ giữa các đặc trưng cơ học của thép kết cấu với các thông số thu được từ đường cong  $P-h$ . Trong đó, quan hệ ứng suất – biến dạng của thép kết cấu được lấy như biểu thức (2) với các đặc trưng cơ học được khảo sát thay đổi trong khoảng:  $E$  từ 10 ~ 260 GPa,  $\sigma_y$  từ 235 ~ 535 MPa,  $n$  từ 0 ~ 0,50,  $\alpha$  từ 1 ~ 23, và hệ số Poát-xông không đổi bằng 0,3. Với bộ dữ liệu tương đối lớn và các dải thay đổi đặc trưng cơ học của vật liệu được lựa chọn phù hợp với thép kết cấu ngoại trừ giá trị của  $E$  có độ phủ rộng hơn nhằm mục đích tăng độ chính xác cho các hàm số phù hợp [14], hai hàm số không thứ nguyên đã được thiết lập dưới dạng hàm đa thức ba chiều bậc ba cho phép xác định được giá trị  $\sigma_y$  và  $n$  một khi đã biết trước  $\alpha$ . Chi tiết quá trình phân tích và thiết lập hàm số cũng như trình tự áp dụng được thể hiện trong tài liệu [14].

Một cách tương tự, nhưng nhằm khắc phục hạn chế của nghiên cứu trước đó trong việc cần biết trước giá trị  $\alpha$  để có thể xác định được các đặc trưng cơ lý khác của vật liệu [14], bằng cách phân tích mô hình PTHH sử dụng phần mềm Abaqus mô phỏng thí nghiệm nanoindentation với mũi kim cầu trên vật liệu thép kết cấu của bộ gồm 325 dữ liệu đầu vào, ba hàm số không thứ nguyên  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  và  $\Pi_3$  đã được thiết lập dưới dạng hàm đa thức ba chiều bậc ba như biểu thức (6), (7) và (8) dưới đây. Chi tiết mô hình Abaqus mô phỏng thí nghiệm, kết quả kiểm chứng độ tin cậy của mô hình trên ba loại thép kết cấu phổ biến là SS400, SM490, SM520 cũng như quá trình phân tích và thiết lập hàm số được thể hiện trong tài liệu tham khảo [16]:

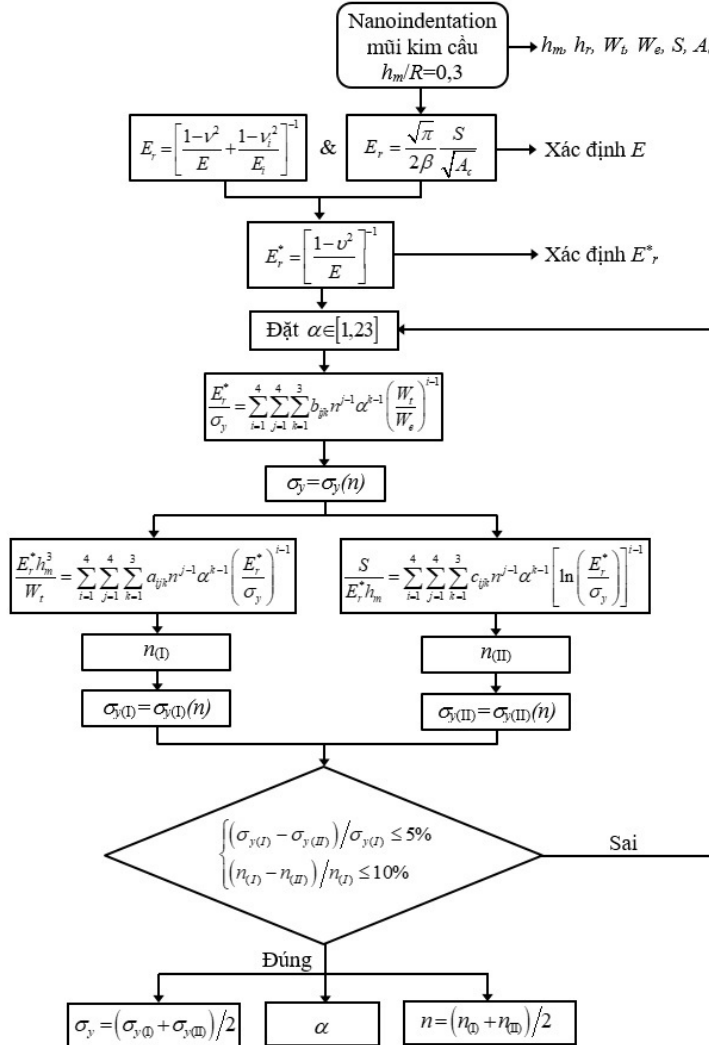
$$\frac{E_r h_m^3}{W_t} = \Pi_1 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^3 a_{ijk} n^{j-1} \alpha^{k-1} \left( \frac{E_r}{\sigma_y} \right)^{i-1} \quad (6)$$

$$\frac{E_r}{\sigma_y} = \Pi_2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^3 b_{ijk} n^{j-1} \alpha^{k-1} \left( \frac{W_t}{W_e} \right)^{i-1} \quad (7)$$

$$\frac{S}{E_r h_m} = \Pi_3 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^3 c_{ijk} n^{j-1} \alpha^{k-1} \left[ \ln \left( \frac{E_r}{\sigma_y} \right) \right]^{i-1} \quad (8)$$

trong đó các hệ số  $a_{ijk}$ ,  $b_{ijk}$  và  $c_{ijk}$  như trong Phụ lục A. Các hàm không thứ nguyên  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  và  $\Pi_3$  thể hiện mối quan hệ giữa các thông số thu được từ đường cong  $P-h$  và đặc trưng cơ học của vật

liệu, trong đó  $W_e$  và  $W_t$  là công đàn hồi (elastic nanoindentation work/energy) và tổng công (total nanoindentation work/energy) thực hiện được trong thí nghiệm như minh họa trong Hình 2. Từ đó, các đặc trưng cơ học của thép kết cấu có thể được xác định từ một thí nghiệm nanoindentation mũi kim cầu với tỉ số  $h_m/R = 0,3$  theo trình tự được thể hiện trong Hình 3.



Hình 3. Trình tự xác định đặc trưng cơ học của thép kết cấu từ một thí nghiệm nanoindentation mũi kim cầu với tỉ số  $h_m/R = 0,3$  [16]

Như vậy, về mặt nguyên lý, các đặc trưng cơ học của thép kết cấu có thể được ước lượng/xác định từ một thí nghiệm nanoindentation với mũi kim Berkovich hoặc mũi kim cầu dựa trên các hàm không thứ nguyên. Tuy nhiên, sử dụng các phương pháp trên cũng gặp các khó khăn trong thực hành, kết quả thu được có độ chính xác chưa cao hoặc có thể đối diện nguy cơ thu được kết quả không duy nhất như đã được phân tích ở trên. Để khắc phục những hạn chế đó, kết quả thí nghiệm nanoindentation với cả hai loại mũi kim Berkovich và mũi kim cầu sẽ được kết hợp bằng cách áp dụng có hiệu chỉnh phương pháp đường chuẩn được đề xuất bởi Phadikar và cs. [27] nhằm thu được kết quả là các giá trị đặc trưng cơ học của thép kết cấu một cách chính xác và duy nhất.

### 3. Phương pháp đường chuẩn $P_m/(Sh_m)$ hiệu chỉnh

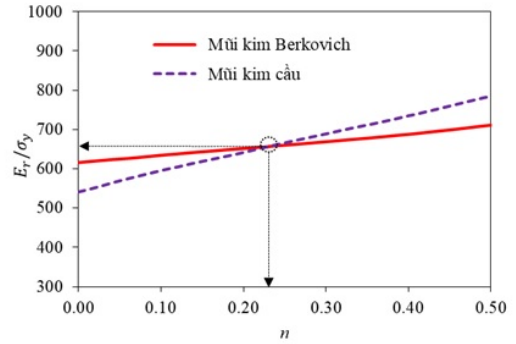
Phương pháp đường chuẩn  $P_m/(Sh_m)$  được đề xuất bởi Phadikar và cs. [27] trong đó cho rằng với cùng một loại mũi kim, hai vật liệu khác nhau có thể có đường cong  $P-h$  giống nhau nếu chúng có cùng giá trị  $P_m$  và  $S$ . Trên cơ sở đó, đại lượng  $P_m/(Sh_m)$  từ vật liệu có quan hệ ứng suất - biến dạng như biểu thức (1) có thể biểu diễn dạng hàm số sau [27]:

$$P_m/(Sh_m) = G\left(\frac{E}{\sigma_y}, n\right) \quad (9)$$

Với thép kết cấu, đại lượng  $P_m/(Sh_m)$  từ đường cong  $P-h$  được hiệu chỉnh như sau:

$$P_m/(Sh_m) = G\left(\frac{E_r}{\sigma_y}, n, \alpha\right) \quad (10)$$

Với mỗi giá trị  $\alpha$  nhất định,  $P_m/(Sh_m)$  là hàm số của  $E_r/\sigma_y$  và  $n$ , từ đó đường chuẩn  $P_m/(Sh_m)$  có thể xác định được trong  $E_r/\sigma_y - n$ . Có thể hiểu bất kỳ vật liệu nào nằm trên đường chuẩn này đều có giá trị  $P_m/(Sh_m)$  như nhau. Như vậy, nếu hàm số (10) được thiết lập từ thí nghiệm nanoindentation với hai loại mũi kim Berkovich và mũi kim cầu sẽ cho ta hai hàm số  $G_1$  và  $G_2$  khác nhau tương ứng với mỗi loại mũi kim. Khi đó, với mỗi giá trị  $\alpha$  nhất định, giao điểm của hai đường chuẩn  $P_m/(Sh_m)$  ứng với hai hàm số  $G_1$  và  $G_2$  trong cùng không gian  $E_r/\sigma_y - n$  sẽ cho kết quả duy nhất của  $E_r/\sigma_y$  và  $n$ , đây cũng chính là đặc trưng cơ học cần xác định của vật liệu. Giao điểm của hai đường chuẩn trong mỗi không gian  $E_r/\sigma_y - n$  là duy nhất, như được thể hiện trong Hình 4, điều đó đảm bảo cho sự duy nhất của đặc trưng cơ học thu được.



Hình 4. Đường chuẩn  $P_m/(Sh_m)$  cho mũi kim Berkovich và mũi kim cầu giao cắt nhau tại điểm có tọa độ  $E_r/\sigma_y = 668, n = 0,230$

Các hàm số  $G_1$  và  $G_2$  ứng với mũi kim Berkovich và mũi kim cầu sẽ được thiết lập trên cơ sở khớp một số lượng dữ liệu đủ lớn các thông số  $E_r/\sigma_y, n, \alpha$ , và  $P_m/(Sh_m)$  với các hàm số phù hợp (fitting function). Trên cơ sở bộ 576 dữ liệu với mũi kim Berkovich và bộ 325 dữ liệu với mũi kim cầu, sử dụng phân tích hồi quy, hai hàm số  $G_1$  và  $G_2$  được thiết lập dưới dạng biểu thức (11) và (12) với chỉ số độ phù hợp  $R^2$  tương ứng là 0,9921 và 0,9893:

$$\left(\frac{P_m}{Sh_m}\right)_1 = G_1 = \left\{ \sum_{i=1}^6 f_i (\ln(E_r/\sigma_y))^{i-1} \right\} \left\{ \sum_{j=1}^6 g_j n^{j-1} \right\} \left\{ \sum_{k=1}^6 h_k \alpha^{k-1} \right\} \quad (11)$$

$$\left(\frac{P_m}{Sh_m}\right)_2 = G_2 = \left\{ \sum_{i=1}^6 f_i (\ln(E_r/\sigma_y))^{i-1} \right\} \left\{ \sum_{j=1}^6 g_j n^{j-1} \right\} \left\{ \sum_{k=1}^6 h_k \alpha^{k-1} \right\} \quad (12)$$

trong đó các hệ số  $f_i, g_i$ , và  $h_i$  như trong Bảng 1.

Bảng 1. Hệ số  $f_i, g_i$ , và  $h_i$  của các hàm số phù hợp thu được từ phân tích hồi quy

Hệ số	$G_1$	$G_2$	Hệ số	$G_1$	$G_2$
$f_1$	10700,259	5586,939	$g_4$	0,195	-0,964
$f_2$	-4194,351	-2348,503	$g_5$	2,514	1,089
$f_3$	402,879	253,740	$g_6$	-4,247	-0,355
$f_4$	45,378	23,270	$h_1$	-536,558	4250,918
$f_5$	-10,481	-6,219	$h_2$	268,586	-2680,331
$f_6$	0,514	0,323	$h_3$	-31,879	556,652
$g_1$	0,018	0,255	$h_4$	0,431	-51,396
$g_2$	0,015	0,006	$h_5$	0,083	2,176
$g_3$	-0,226	0,349	$h_6$	-0,003	-0,034

#### 4. Thuật toán xác định đặc trưng cơ học của thép kết cấu từ thí nghiệm nanoindentation với hai mũi Berkovich và mũi kim cầu

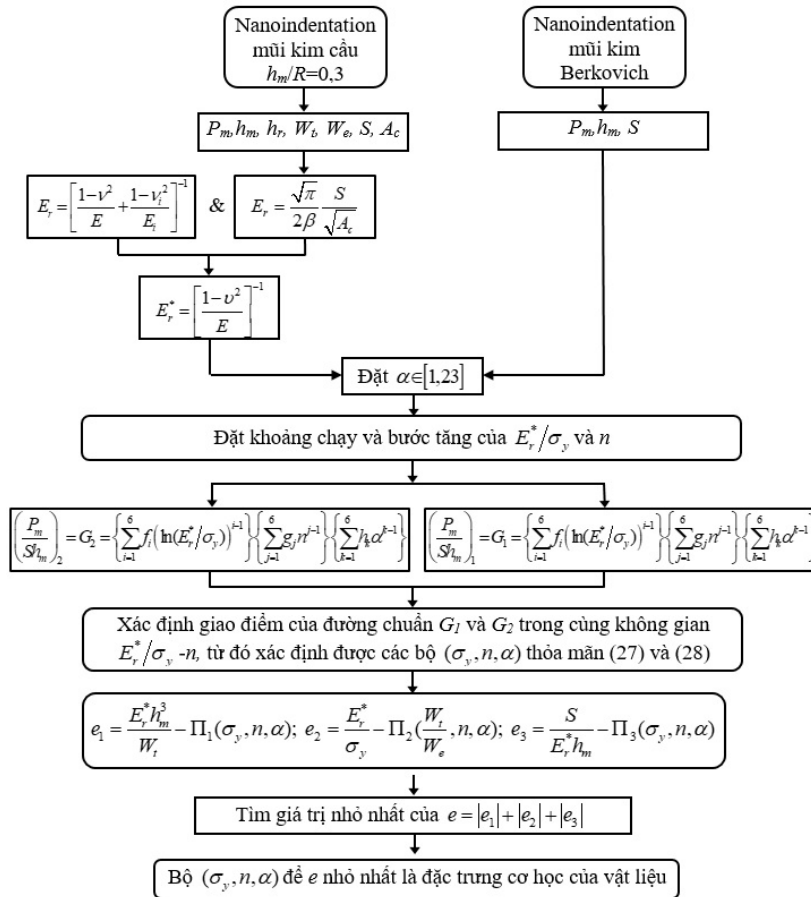
Trên cơ sở ba hàm số  $\Pi_1, \Pi_2$  và  $\Pi_3$  thể hiện mối quan hệ giữa các thông số thu được từ đường cong  $P-h$  của thí nghiệm nanoindentation với mũi kim cầu [16], kết hợp với hai hàm số  $G_1$  và  $G_2$  theo phương pháp đường chuẩn được thiết lập trong nghiên cứu này, thuật toán xác định đặc trưng cơ học của thép kết cấu từ hai thí nghiệm nanoindentation với các mũi kim khác nhau được đề xuất như trên Hình 5. Với thuật toán này, sau khi thí nghiệm nanoindentation với hai loại mũi kim Berkovich và mũi kim cầu được thực hiện trong đó độ ấn sâu lớn nhất của mũi kim cầu là  $h_m = 0,3R$ , các thông số đo và tính toán được bao gồm  $P_m, h_m, W_t, W_e, S, A_c$  từ đường cong  $P-h$  của nanoindentation mũi kim cầu và  $P_m, h_m, S$  từ đường cong  $P-h$  của nanoindentation mũi kim Berkovich sẽ được sử dụng làm tham số đầu vào cho thuật toán. Thuật toán bắt đầu bằng việc xác định giá trị  $E_r^*$  theo các thông số thu được từ thí nghiệm nanoindentation với mũi kim cầu. Lưu ý rằng  $E_r^*$  được sử dụng thay thế  $E_r$  trong các hàm số  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, G_1, G_2$  do các hàm số được lập dựa trên kết quả mô phỏng PTHH trong đó đầu mũi kim được coi là cứng tuyệt đối. Biến số  $\alpha$  được thay đổi trong khoảng từ 1 đến 23 với các bước tăng phù hợp. Ứng với mỗi giá trị  $\alpha$ , các đường chuẩn  $G_1$  và  $G_2$  ứng với giá trị  $P_m/(Sh_m)$  thu được từ mũi kim Berkovich và mũi kim cầu sẽ được vẽ trong không gian  $E_r/\sigma_y - n$ , giao điểm của hai đường chuẩn này sẽ là một cặp giá trị  $E_r/\sigma_y$  và  $n$ , từ đó hình thành bộ giá trị  $E_r/\sigma_y, n, \alpha$  tiềm năng có thể là đặc trưng cơ học cần tìm. Đặc trưng cơ học của thép kết cấu được xác định chính là bộ giá trị  $E_r/\sigma_y, n, \alpha$  trong số các bộ giá trị tiềm năng trên làm cho tổng độ lệch tuyệt đối nhỏ nhất giữa vế phải và vế trái của các hàm số  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  là nhỏ nhất. Tức là tìm bộ giá trị  $E_r/\sigma_y, n, \alpha$  để  $e = |e_1| + |e_2| + |e_3|$  nhỏ nhất, trong đó:

$$e_1 = \frac{E_r^* h_m^3}{W_t} - \Pi_1(\sigma_y, n, \alpha) \tag{13}$$

$$e_2 = \frac{E_r^*}{\sigma_y} - \Pi_2\left(\frac{W_t}{W_e}, n, \alpha\right) \tag{14}$$

$$e_3 = \frac{S}{E_r^* h_m} - \Pi_3(\sigma_y, n, \alpha) \tag{15}$$





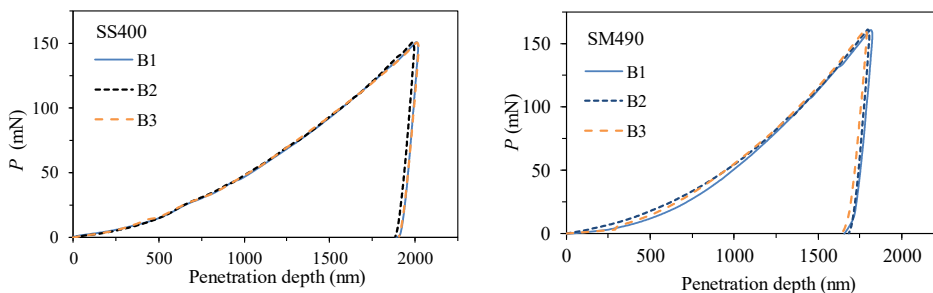
Hình 5. Trình tự xác định đặc trưng cơ học của thép kết cấu từ 2 thí nghiệm

### 5. Kết quả áp dụng thuật toán đề xuất

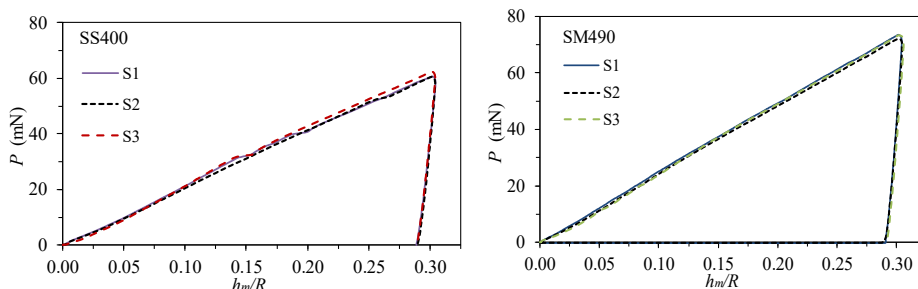
Để kiểm chứng mức độ hiệu quả và sự đúng đắn của thuật toán đề xuất trên, một số thí nghiệm nanoindentation với hai loại mũi kim Berkovich và mũi kim cầu được thực hiện trước đó trên hai loại thép kết cấu thông dụng là SS400 và SM490 sẽ được sử dụng [14, 16]. Hình 6 thể hiện các đường cong  $P-h$  là kết quả của 3 thí nghiệm nanoindentation với mũi kim Berkovich (kí hiệu Bi với  $i = 1, 2, 3$ ) và 3 thí nghiệm với mũi kim cầu (kí hiệu Si với  $i = 1, 2, 3$ ) trên hai loại thép SS400 và SM490.

Từ mỗi đường cong  $P-h$  của nanoindentation mũi kim cầu, các thông số  $P_m, h_m, W_t, W_e$  được xác định trực tiếp, các đại lượng  $S, E_r, E$  được xác định từ các biểu thức (3), (4), và (5), từ đó xác định được thêm đại lượng  $E_r^* = \left( (1 - \nu^2)/E \right)^{-1}$  để sử dụng trong thuật toán đề xuất. Các đại lượng này của các thí nghiệm nanoindentation với mũi kim cầu trên hai loại thép được thể hiện trong Bảng 2, trong khi đó các thông số  $P_m, h_m, S$  từ thí nghiệm nanoindentation với mũi kim Berkovich được thể hiện trong Bảng 3.

Bảng 4 ghi lại kết quả xác định đặc trưng cơ học của hai loại thép trên từ một thí nghiệm nanoindentation với mũi kim cầu và sai số so với kết quả thu được từ thí nghiệm kéo mẫu thép như đã được giới thiệu trong tài liệu tham khảo [16] như là đối chứng để kiểm tra mức độ hiệu quả của thuật toán đề xuất. Đặc trưng cơ học thu được từ thí nghiệm kéo mẫu đối với SS400 là  $\sigma_y = 306,6$  MPa,  $n = 0,204$ ,  $\alpha = 18,1$  và đối với SM490 là  $\sigma_y = 353,5$  MPa,  $n = 0,266$ ,  $\alpha = 13,4$  [16].



(a) Nanoindentation với mũi kim Berkovich



(b) Nanoindentation với mũi kim cầu

Hình 6. Đường cong  $P-h$  thu được từ thí nghiệm

Bảng 2. Các thông số xác định từ đường cong  $P-h$  của thí nghiệm mũi kim cầu

	$P_m$ (N)	$h_m$ (mm)	$W_t$ (N.mm)	$W_e$ (N.mm)	$S$ (N/mm)	$E_r$ (GPa)	$E$ (GPa)	$E_r^*$ (GPa)
<b>Thép SS400</b>								
S1	0,060835	0,001520	4,108E-05	6,542E-07	1335	187,9	204,5	224,7
S2	0,060596	0,001522	3,989E-05	6,221E-07	1330	187,0	203,3	223,4
S3	0,062492	0,001521	4,165E-05	7,061E-07	1288	181,2	195,8	215,2
<b>Thép SM490</b>								
S1	0,073593	0,001524	5,158E-05	1,170E-06	1223	178,3	192,1	211,1
S2	0,072185	0,001521	5,077E-05	1,110E-06	1250	181,2	195,8	215,2
S3	0,073173	0,001523	5,133E-05	1,123E-06	1255	182,1	197,0	216,5

Bảng 3. Các thông số xác định từ đường cong  $P-h$  của thí nghiệm mũi kim Berkovich

Thí nghiệm	Thép SS400			Thép SM490		
	$P_m$ (N)	$h_m$ (mm)	$S$ (N/mm)	$P_m$ (N)	$h_m$ (mm)	$S$ (N/mm)
S1	0,150726	0,002002	2042	0,160751	0,001829	1814
S2	0,150715	0,001976	1979	0,160721	0,001809	2054
S3	0,150710	0,002006	2071	0,160742	0,001796	1884

Bảng 4. Đặc trưng cơ học xác định từ một thí nghiệm nanoindentation mũi kim cầu [16]

Thí nghiệm	Thép SS400				Thép SM490			
	$\sigma_y$ (MPa)	% sai số $\sigma_y$	$n$	% sai số $n$	$\sigma_y$ (MPa)	% sai số $\sigma_y$	$n$	% sai số $n$
S1	279,4	-8,9%	0,193	-5,5%	327,8	-7,3%	0,246	-7,5%
S2	317,1	3,5%	0,195	-4,6%	402,5	13,9%	0,304	14,1%
S3	321,8	5,0%	0,197	-3,5%	400,8	13,4%	0,302	13,3%

Các thông số thu được từ đường cong  $P-h$  của các thí nghiệm nanoindentation với hai loại mũi kim sẽ được sử dụng làm thông số đầu vào của thuật toán đề xuất để xác định đặc trưng cơ học của thép kết cấu. Với mỗi loại thép, 3 đường cong thu được từ thí nghiệm với mũi kim Berkovich kết hợp với 3 đường cong thu được từ thí nghiệm với mũi kim cầu sẽ cho 9 kết quả cặp thí nghiệm (kí hiệu Bi-Sj với  $i, j = 1 \div 3$ ). Nhằm giảm thời gian phân tích của thuật toán cũng như có thể thu được kết quả sát thực, khoảng chạy và bước tăng của các thông số  $E_r^*/\sigma_y, n, \alpha$  được cẩn thận lựa chọn một cách phù hợp. Dựa trên cơ sở các khoảng phân bố thông thường của thép kết cấu, khoảng chạy và bước tăng của các biến số sử dụng trong phân tích thuật toán như sau:  $E_r^*/\sigma_y$  thay đổi trong khoảng  $300 \div 1500$  với bước tăng  $\Delta(E_r^*/\sigma_y) = 5$ ,  $n$  thay đổi trong khoảng  $0 \div 0,5$  với bước tăng  $\Delta n = 0,001$ ,  $\alpha$  thay đổi

Bảng 5. Đặc trưng cơ học của thép kết cấu xác định từ thuật toán đề xuất

Thí nghiệm	$\sigma_y$ (MPa)	% sai số $\sigma_y$	$n$	% sai số $n$	$\alpha$	% sai số $\alpha$
Thép SS400						
B1-S1	289,9	-5,44%	0,195	-4,41%	18,6	2,76%
B1-S2	314,6	2,62%	0,203	-0,49%	17,5	-3,31%
B1-S3	305,2	-0,44%	0,197	-3,43%	19,0	4,97%
B2-S1	286,2	-6,64%	0,194	-4,90%	18,8	3,87%
B2-S2	312,4	1,91%	0,200	-1,96%	18,5	2,21%
B2-S3	296,8	-3,19%	0,196	-3,92%	17,4	-3,87%
B3-S1	291,8	-4,82%	0,196	-3,92%	18,5	2,21%
B3-S2	297,9	-2,85%	0,201	-1,47%	17,6	-2,76%
B3-S3	311,9	1,72%	0,210	2,94%	19,2	6,08%
Thép SM490						
B1-S1	335,1	-5,21%	0,250	-6,02%	14,0	4,48%
B1-S2	380,9	7,75%	0,278	4,51%	12,7	-5,22%
B1-S3	370,1	4,69%	0,284	6,77%	12,9	-3,73%
B2-S1	337,8	-4,45%	0,256	-3,76%	14,2	5,97%
B2-S2	380,9	7,75%	0,290	9,02%	13,2	-1,49%
B2-S3	379,8	7,45%	0,283	6,39%	13,3	-0,75%
B3-S1	343,3	-2,90%	0,257	-3,38%	13,8	2,99%
B3-S2	371,0	4,96%	0,283	6,39%	13,9	3,73%
B3-S3	376,5	6,51%	0,288	8,27%	12,4	-7,46%

trong khoảng  $1 \div 23$  với bước tăng  $\alpha = 0,1$ . Thuật toán được thực hiện bằng cách sử dụng thuật toán di truyền (genetic algorithm – GA), lập trình giải thuật trên Matlab. Kết quả phân tích của 9 trường hợp trên mỗi loại vật liệu sử dụng thuật toán đề xuất được trình bày trong Bảng 5, trong đó  $\sigma_y, n, \alpha$  là đặc trưng cơ học của vật liệu xác định được cùng với % sai số của chúng so với kết quả thu được từ thí nghiệm kéo mẫu thử tương ứng.

Kết quả từ Bảng 5 cho thấy rằng, ngoài việc xác định được nghiệm duy nhất dựa trên nguyên lý của phương pháp đề xuất, các đặc trưng cơ học của hai loại thép kết cấu SS400 và SM490 thu được từ sử dụng kết quả thí nghiệm nanoindentation với hai mũi kim Berkovich và mũi kim cầu cũng phù hợp với các giá trị tương ứng thu được từ thí nghiệm kéo mẫu với sai số nhỏ hơn 10%. So sánh với kết quả thu được từ phương pháp sử dụng một thí nghiệm nanoindentation với mũi kim cầu cho thấy các đặc trưng cơ học xác định được từ thuật toán đề xuất trong nghiên cứu này sát thực hơn với % sai số tương ứng nhỏ hơn. Điều này cũng dễ hiểu vì mặc dù cùng dùng chung bộ hàm số  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  phương pháp trong tài liệu [16] dùng kết quả phân tích khi sai khác giữa các cặp  $\sigma_{y(I)} - \sigma_{y(II)}$  và  $n_{(I)} - n_{(II)}$  xác định từ hai cặp phương trình  $\Pi_1 - \Pi_2$  và  $\Pi_2 - \Pi_3$  nhỏ hơn tương ứng 5% và 10%, từ đó đặc trưng cơ học cần tìm là giá trị trung bình như thể hiện trên Hình 3. Độ chính xác của thuật toán đề xuất trong nghiên cứu này còn có thể được nâng cao lên nếu giảm bước tăng của các biến số sử dụng trong quá trình phân tích, tuy nhiên điều đó sẽ làm tăng thời gian phân tích cũng như không thật sự cần thiết. Với kết quả thu được có độ sai số dưới 10% có thể coi là chấp nhận được và điều quan trọng là kết quả thu được là duy nhất.

## 6. Kết luận

Trong bài báo này, một phương pháp mới cho phép xác định tính chất cơ học của thép kết cấu từ thí nghiệm nanoindentation với hai loại mũi kim Berkovich và mũi kim cầu đã được đề xuất. Phương pháp này được đề xuất trên cơ sở áp dụng có hiệu chỉnh phương pháp đường chuẩn  $P_m/(Sh_m)$  sử dụng kết quả phân tích hàm không thứ nguyên và mô phỏng phân tử hữu hạn đã được thực hiện trong các đề xuất trước cho thí nghiệm nanoindentation với từng mũi kim cầu và mũi kim Berkovich. Trên cơ sở bộ 576 dữ liệu với mũi kim Berkovich và bộ 325 dữ liệu với mũi kim cầu, hai hàm số  $G_1$  và  $G_2$  thể hiện mối quan hệ giữa đại lượng  $P_m/(Sh_m)$  ứng với mỗi loại mũi kim và các đặc trưng cơ học của vật liệu đã được thiết lập bằng phân tích hồi quy. Kết hợp ba hàm số  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  thể hiện mối quan hệ giữa các thông số thu được từ đường cong  $P-h$  của thí nghiệm nanoindentation với mũi kim cầu với hai hàm số  $G_1$  và  $G_2$  được thiết lập, phương pháp xác định đặc trưng cơ học của thép kết cấu từ hai thí nghiệm nanoindentation với các mũi kim khác nhau đã được đề xuất. Kết quả kiểm chứng từ 9 cặp thí nghiệm nanoindentation với hai loại mũi kim là mũi Berkovich và mũi cầu trên hai loại thép kết cấu phổ biến SS400 và SM490 cho thấy các đặc trưng cơ học bao gồm  $\sigma_y, n, \alpha$  được xác định từ phương pháp đề xuất cho sai số nhỏ hơn so với phương pháp chỉ dùng một thí nghiệm nanoindentation với mũi kim cầu. Các sai số nhỏ hơn 10% là những kết quả chấp nhận được. Ngoài ra phương pháp đề xuất trong nghiên cứu này đảm bảo tính duy nhất của kết quả thu được, đây được coi là ưu điểm nổi trội của các phương pháp đề xuất trước đó.

## Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo thông qua Đề tài KH&CN mã số CT.2019.03.05 thuộc Chương trình KH&CN cấp Bộ - Chương trình 4.0.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Fischer-Cripps, A. C. (2011). *Nanoindentation*. Springer Verlag, New-York.
- [2] Bhushan, B. (2007). *Handbook of nanotechnology*. Springer, Berlin.
- [3] Oliver, W. C., Pharr, G. M. (1992). [An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments](#). *Journal of Materials Research*, 7(6):1564–1583.
- [4] Oliver, W. C., Pharr, G. M. (2004). [Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology](#). *Journal of Materials Research*, 19(1):3–20.
- [5] Nayeibi, A., Abdi, R. E., Bartier, O., Mauvoisin, G. (2002). [New procedure to determine steel mechanical parameters from the spherical indentation technique](#). *Mechanics of Materials*, 34(4):243–254.
- [6] Lee, J. H., Kim, T., Lee, H. (2010). [A study on robust indentation techniques to evaluate elastic–plastic properties of metals](#). *International Journal of Solids and Structures*, 47(5):647–664.
- [7] Jiang, P., Zhang, T., Feng, Y., Yang, R., Liang, N. (2009). [Determination of plastic properties by instrumented spherical indentation: Expanding cavity model and similarity solution approach](#). *Journal of Materials Research*, 24(3):1045–1053.
- [8] Cao, Y. P., Lu, J. (2004). [A new method to extract the plastic properties of metal materials from an instrumented spherical indentation loading curve](#). *Acta Materialia*, 52(13):4023–4032.
- [9] Ogasawara, N., Chiba, N., Chen, X. (2009). [A simple framework of spherical indentation for measuring elastoplastic properties](#). *Mechanics of Materials*, 41(9):1025–1033.
- [10] Le, M.-Q. (2012). [Material characterization by instrumented spherical indentation](#). *Mechanics of Materials*, 46:42–56.
- [11] Yoshida, F. (2000). [A constitutive model of cyclic plasticity](#). *International Journal of Plasticity*, 16(3-4): 359–380.
- [12] Pham, T.-H., Kim, S.-E. (2016). [Microstructure evolution and mechanical properties changes in the weld zone of a structural steel during low-cycle fatigue studied using instrumented indentation testing](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 114:141–156.
- [13] Kato, B., Aoki, H., Yamanouchi, H. (1990). [Standardized mathematical expression for stress-strain relations of structural steel under monotonic and uniaxial tension loading](#). *Materials and Structures*, 23(1): 47–58.
- [14] Pham, T.-H., Kim, J. J., Kim, S.-E. (2015). [Estimating constitutive equation of structural steel using indentation](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 90:151–161.
- [15] Pham, T.-H., Kim, S.-E. (2017). [Determination of equi-biaxial residual stress and plastic properties in structural steel using instrumented indentation](#). *Materials Science and Engineering: A*, 688:352–363.
- [16] Pham, T.-H., Phan, Q.-M., Kim, S.-E. (2018). [Identification of the plastic properties of structural steel using spherical indentation](#). *Materials Science and Engineering: A*, 711:44–61.
- [17] Nguyen, N.-V., Kim, J. J., Kim, S.-E. (2019). [Methodology to extract constitutive equation at a strain rate level from indentation curves](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 152:363–377.
- [18] Nguyen, N.-V., Pham, T.-H., Kim, S.-E. (2019). [Strain rate-dependent behaviors of mechanical properties of structural steel investigated using indentation and finite element analysis](#). *Mechanics of Materials*, 137: 103089.
- [19] Hoan, P. T., Vinh, N. N., Tung, N. T. T. (2019). [Indentation for investigation of strain rate effect on mechanical properties in structural steel weld zone](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - NUCE*, 13(3):104–112.
- [20] Nguyen, N.-V., Pham, T.-H., Kim, S.-E. (2019). [Strain rate sensitivity behavior of a structural steel during low-cycle fatigue investigated using indentation](#). *Materials Science and Engineering: A*, 744:490–499.
- [21] Pham, T.-H., Nguyen, N.-V. (2020). [Effect of Indentation Strain Rate on Plastic Properties in SS400 Steel Weld Zone](#). *Lecture Notes in Civil Engineering*, Springer Singapore, 259–267.
- [22] Pham, T.-H., Kim, S.-E. (2015). [Determination of mechanical properties in SM490 steel weld zone using nanoindentation and FE analysis](#). *Journal of Constructional Steel Research*, 114:314–324.
- [23] Kim, J. J., Pham, T.-H., Kim, S.-E. (2015). [Instrumented indentation testing and FE analysis for investiga-](#)

- tion of mechanical properties in structural steel weld zone. *International Journal of Mechanical Sciences*, 103:265–274.
- [24] Pham, T.-H., Nguyen, N.-V. (2021). Mechanical properties of constituent phases in structural steels and heat-affected zones investigated by statistical nanoindentation analysis. *Construction and Building Materials*, 268:121211.
- [25] Liu, L., Ogasawara, N., Chiba, N., Chen, X. (2009). Can indentation technique measure unique elastoplastic properties? *Journal of Materials Research*, 24(3):784–800.
- [26] Chen, X., Ogasawara, N., Zhao, M., Chiba, N. (2007). On the uniqueness of measuring elastoplastic properties from indentation: The indistinguishable mystical materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(8):1618–1660.
- [27] Phadikar, J., Bogetti, T., Karlsson, A. (2013). On the uniqueness and sensitivity of indentation testing of isotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 50(20-21):3242–3253.
- [28] Huang, Y., Liu, X., Zhou, Y., Ma, Z., Lu, C. (2011). Mathematical Analysis on the Uniqueness of Reverse Algorithm for Measuring Elastic-plastic Properties by Sharp Indentation. *Journal of Materials Science & Technology*, 27(7):577–584.
- [29] Brand, L. (1957). The Pi theorem of dimensional analysis. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1(1):35–45.
- [30] Việt, V. Q., Hùng, T. V., Hoàn, P. T. (2019). Nghiên cứu khả năng chịu uốn của ống tròn hai lớp thép nhồi bê tông có liên kết mối nối bằng mô phỏng phần tử hữu hạn. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXDHN*, 13(4V):115–128.
- [31] Hoàn, P. T., Trung, P. V., Việt, V. Q. (2020). Nghiên cứu xác định vị trí tối ưu của sườn tăng cường dọc của dầm cầu thép chịu uốn. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXDHN*, 14(4V): 29–38.

**Phụ lục A.**

Bảng A.1. Hệ số  $a_{ijk}$  của hàm  $\Pi_1$

$(j, k)$	$a_{ijk}$			
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
(1, 1)	7,163E-01	3,105E-02	2,111E-06	-7,647E-10
(2, 1)	6,093E-01	-1,177E-02	-8,512E-05	2,391E-08
(3, 1)	5,543E+00	-1,941E-01	1,382E-04	-5,866E-09
(4, 1)	-8,983E+00	2,856E-01	-5,668E-05	-3,466E-08
(1, 2)	2,051E-03	-6,359E-05	1,726E-08	-1,405E-11
(2, 2)	3,981E-02	-7,835E-04	-3,457E-07	3,900E-10
(3, 2)	-7,625E-01	2,265E-02	4,110E-08	-2,713E-09
(4, 2)	1,189E+00	-3,317E-02	-2,297E-06	4,767E-09
(1, 3)	-5,510E-05	1,693E-06	-6,644E-10	5,457E-13
(2, 3)	-2,364E-03	5,202E-05	1,734E-08	-1,311E-11
(3, 3)	2,376E-02	-6,569E-04	1,973E-08	5,379E-11
(4, 3)	-3,631E-02	9,490E-04	-2,738E-08	-8,083E-11

Bảng A.2. Hệ số  $b_{ijk}$  của hàm  $\Pi_2$

$(j, k)$	$b_{ijk}$			
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
(1, 1)	3,055E+00	8,202E+00	-4,683E-03	-2,413E-04
(2, 1)	-3,993E+01	4,494E+00	5,277E-01	4,128E-02
(3, 1)	-3,229E+02	1,576E+02	-4,511E+00	-3,717E-01
(4, 1)	7,700E+02	-3,926E+02	3,199E+01	6,236E-01
(1, 2)	-1,060E-01	3,469E-02	3,267E-05	2,521E-05
(2, 2)	-4,249E-01	5,681E-01	-2,021E-02	-3,946E-03
(3, 2)	3,248E+01	-1,597E+01	4,226E-01	3,418E-02
(4, 2)	-5,378E+01	3,155E+01	-2,672E+00	-5,665E-02
(1, 3)	3,015E-03	-1,017E-03	4,542E-06	-6,536E-07
(2, 3)	3,834E-02	-2,332E-02	2,519E-04	9,682E-05
(3, 3)	-7,688E-01	3,923E-01	-9,024E-03	-8,288E-04
(4, 3)	1,096E+00	-7,022E-01	5,851E-02	1,375E-03

Bảng A.3. Hệ số  $c_{ijk}$  của hàm  $\Pi_3$

$(j, k)$	$c_{ijk}$			
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
(1, 1)	-1,880E-01	1,382E+00	-1,053E-01	1,428E-04
(2, 1)	4,600E+01	-2,722E+01	4,959E+00	-2,970E-01
(3, 1)	-1,820E+02	1,160E+02	-2,341E+01	1,517E+00
(4, 1)	2,046E+02	-1,335E+02	2,770E+01	-1,840E+00
(1, 2)	-2,835E-02	1,832E-02	-3,759E-03	2,412E-04
(2, 2)	-7,662E+00	4,799E+00	-9,387E-01	5,851E-02
(3, 2)	3,329E+01	-2,112E+01	4,225E+00	-2,693E-01
(4, 2)	-3,822E+01	2,438E+01	-4,916E+00	3,164E-01
(1, 3)	1,056E-03	-6,731E-04	1,357E-04	-8,612E-06
(2, 3)	2,161E-01	-1,371E-01	2,728E-02	-1,725E-03
(3, 3)	-1,034E+00	6,575E-01	-1,318E-01	8,401E-03
(4, 3)	1,216E+00	-7,734E-01	1,553E-01	-9,928E-03