■Ngày nhận bài: 08/3/2021 ■Ngày sửa bài: 19/4/2021 ■Ngày chấp nhận đăng: 07/5/2021

Giải phương trình vi phân phi tuyến cấp ba bằng phương pháp phân tích Adomian

Solving third-order nonlinear ordinary differential equation by adomian method

TH.S TRẦN THỊ TRÂM
Trường Đại học Mỏ - Địa chất
(Bài báo được thẩm định bởi TS. Bùi Thị Thúy - Bộ môn Cơ học Lý thuyết - Khoa Khoa học Cơ bản, Đại học Mỏ-Địa chất)

TÓM TẮT:
Những bài toán trong Vật lý, Hoá học, Sinh học và Khoa học kỹ thuật được mô hình hoá toán học bởi hệ phương trình vi phân cấp nguyên. Vì hầu hết những phương trình vi phân thực không có nghiệm giải tích xấp xỉ và kỹ thuật số chính xác, do đó, chúng được sử dụng một cách bao quát. Phương pháp phân tích Adomian (ADM) được sử dụng để giải các phương trình vi phân cấp nguyên, cả tuyến tính và phi tuyến, phương trình vi phân thường cũng như phương trình đạo hàm riêng [2]. Phương pháp lặp mới này đã được chứng minh là thành công hơn đối với cả những bài toán tuyến tính cũng như phi tuyến, nó cho ra nghiệm giải tích và có ưu điểm hơn các phương pháp số thông thường: không phải làm tròn sai số và việc tính toán không phức tạp.

Trong bài báo này, ta sử dụng phương pháp phân tích Adomian cải tiến để đạt được nghiệm của phương trình vi phân phi tuyến cấp ba. Ta cũng chứng minh nghiệm chuỗi đạt được hội tụ nhanh hơn so với chuỗi đạt được bởi phương pháp ADM thông thường. Thí dụ mô phỏng được đưa ra.

Từ khóa: phương trình vi phân, phi tuyến, cấp ba, Adomian

ABSTRACT:
Numerous problems in Physics, Chemistry, Biology and Engineering science are modeled mathematically by systems of ordinary and fractional differential equations. Since most realistic differential equations do not have exact analytic solutions approximation and numerical techniques, therefore, are used extensively. Recently introduced Adomian Decomposition Method (ADM) [2] has been used for solving a wide range of problems. Adomian decomposition method has been known to be a powerful device for solving many functional equations as algebraic equations, ordinary and partial differential equations, integral equations and so on. It is demonstrated that this method has the ability of solving systems of both linear and non-linear differential equations: it yields analytical solutions and offers certain advantages over standard numerical methods. It is free from rounding off errors since it does not involve discretization, and is computationally inexpensive.

In this paper, we used the revised Adomian decomposition method for solving third-order nonlinear ordinary differential equation. It demonstrated that the series solution thus obtained converges faster relative to the series obtained by standard ADM. Several illustrative examples have been presented

Keywords: differential equation, nonlinear, third-order, Adomian

1. Mở đầu

Một bài toán đặc biệt quan trọng trong lĩnh vực khoa học và kỹ thuật là nghiệm chính xác của những hệ phi tuyến và hệ ngẫu nhiên được mô hình bởi các phương trình vi phân hoặc các phương trình đạo hàm riêng đối với các điều kiện biên/ điều kiện đầu tổng quát. Về bản chất, phương pháp giải tích thông thường cần phải biến đổi những bài toán như vậy để dễ xử lý về mặt toán học nhờ các phương pháp đã được thiết lập. Đáng tiếc là những thay đổi đó cần thiết phải thay đổi nghiệm; do đó, chúng có thể làm trệch hướng (đôi khi nghiêm trọng) khỏi trạng thái vật lý thực tế. Những phương pháp như vậy bao gồm những kỹ thuật tuyến tính hoá, phương pháp nhiễu, và sự hạn chế lên quá trình tự nhiên và biên độ của quá trình ngẫu nhiên. Việc tránh những hạn chế này để thu được nghiệm chính xác cần được chú ý khi xét ứng xử tự nhiên của các hệ phức tạp và đưa ra khả năng cải tiến trong khoa học và công nghệ.

Những đề tài nghiên cứu trước trong giải tích toán học nhất thiết phải dựa vào những phương pháp hạn chế như vậy. Do đó ta có thể nói rằng vật lý thường là lý thuyết nhiễu và toán học chủ yếu là lý thuyết toán tử tuyến tính. Dĩ nhiên có một số phương pháp giải những phương trình phi tuyến nhưng không phải là những phương pháp tổng quát. Ví dụ, sự đổi biến tốt thi thoảng đưa đến một phương trình tuyến tính, tuy nhiên điều này hiếm khi làm được.

Mục đích của phương pháp phân tích là tìm nghiệm thực có thể tồn tại của những hệ phức tạp mà không cần phải mô hình hoá và áp đặt điều kiện vào nghiệm để dễ xử lý. Thêm nữa, việc kết hợp những phương trình đạo hàm riêng và phương trình vi phân thường là cần thiết. Trong những bài toán biên có tính phi tuyến mạnh hoặc tính ngẫu nhiên theo tham số, để tìm ra một phương pháp mới là việc quan trọng.

Phương pháp phân tích Adomian đã được sử dụng để giải một miền rộng các bài toán. Biazar [9] đã áp dụng phương pháp Adomian vào một hệ phương trình vi phân thông thường. Daftardar-Gejji và Jafari [11, 13] gợi ý một sự cải tiến của phương pháp này và đã ứng dụng để giải một hệ phương trình đại số phi tuyến. Trong bài báo này, ta sử dụng phương pháp phân tích Adomian cải tiến để giải phương trình vi phân phi tuyến cấp ba.

2. Phương pháp phân tích Adomian giải hệ phương trình vi phân thường

Xét hệ phương trình vi phân thường sau

$$y_i'(x)=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(x)y_j+N_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)+g_i(x),\qquad (1)$$
$$y_i(0)=c_i,\quad i=1,2,\ldots n,$$

Trong đó $b_{ij}(x),g_i(x)\in C[0,T]$ và N_i là những hàm phi tuyến liên tục với các đối số của nó. Tích phân cả hai vế của phương trình (1) từ 0 đến *x* và sử dụng những điều kiện đầu, ta có

$$y_i(x)=c_i+\int_0^x g_i(x)dx+\int_0^x\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(x)y_jdx+\int_0^x N_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)dx,\qquad (2)$$

$i=1,2,\ldots,n.$

ADM thông thường [2] cho nghiệm $y_i(x)$ dạng chuỗi

$$y_i(x)=\sum_{m=0}^{\infty}y_{im}(x)\qquad (3)$$

Và những số hạng phi tuyến được cho dưới dạng chuỗi vô hạn các đa thức Adomian

$$N_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)=\sum_{m=0}^{\infty}A_{im}(y_{10},y_{11},\ldots y_{1m},y_{20},y_{21},\ldots y_{2m},y_{n0},y_{n1},\ldots y_{nm}),\qquad (4)$$

Những đa thức A_{im} này có thể được xây dựng sử dụng công thức tổng quát [3]

$$A_{im}=\frac{1}{m!}\frac{d^m}{d\lambda^m}\left[N_i\left(x,\sum_{m=0}^{\infty}y_{1m}\lambda^m,\ldots,\sum_{m=0}^{\infty}y_{nm}\lambda^m\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$=\left[\frac{1}{m!}\frac{d^m}{d\lambda^m}N_i\left(x,\sum_{m=0}^{\infty}y_{1m}\lambda^m,\ldots,\sum_{m=0}^{\infty}y_{nm}\lambda^m\right)\right]_{\lambda=0}\qquad (5)$$

và những thành phần $y_{im},m\geq 0$ có thể được xác định theo phương pháp hồi quy. Xét thấy các phương trình (2)-(4), ADM xác định những thành phần $y_{im},m\geq 0$ bằng mối quan hệ hồi quy sau:

$$y_{i0}(x)=c_i+\int_0^x g_i(x)dx,\quad i=1,2,\ldots,n,$$
$$y_{i,m+1}(x)=\int_0^x\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(x)y_{jm}dx+\int_0^x A_{im}dx,\quad m=0,1,\ldots.\qquad (6)$$

Ta xấp xỉ nghiệm nghiệm $y_i(x)$ bằng chuỗi rút gọn

$$f_{ik}(x)=\sum_{m=0}^{k-1}y_{im}(x)\ \text{ và }\ \lim_{k\to\infty}f_{ik}(x)=y_i(x),\quad i=1,2,\ldots,n.\qquad (7)$$

Thí dụ 1: Xét phương trình vi phân phi tuyến cấp ba thông thường [9] với các điều kiện đầu $y(0)=0,y'(0)=1$ và $y''(0)=2$. Phương trình này có nghiệm chính xác là $y(x)=xe^x$

$$y'''=\frac{1}{x}y+y''\qquad (8)$$

Đặt $y_1(x)=y(x)$, $y_2(x)=y'(x)$, $y_3(x)=y''(x)$. (9)

Khi đó phương trình (8) chuyển thành hệ ba phương trình vi phân phi tuyến cấp một sau

$$y_1'=y_2,\ y_2'=y_3,\ y_3'=\frac{1}{x}y_1+y_3\qquad (10)$$

Ta áp dụng toán tử nghịch đảo và sử dụng thuật toán biến đổi cho việc tính toán những đa thức Adomian, ta có kỹ thuật sau

$$y_{10}=0\qquad y_{1n+1}=\int_0^x y_{2n}dx$$
$$y_{20}=1\qquad y_{2n+1}=\int_0^x y_{3n}dx\qquad (n=0,1,\ldots)\qquad (11)$$
$$y_{30}=2\qquad y_{3n+1}=\int_0^x\left(\frac{1}{x}y_{1n}+y_{3n}\right)dx$$

Ký hiệu $y^p=y_{10}+y_{11}+\ldots y_{1p}$ là một xấp xỉ của nghiệm với $p+1$ số hạng. Từ phương trình (11), một số xấp xỉ được tính toán như sau

$$y^3=x\left(1+x+\frac{x^2}{3}\right)\qquad y^4=x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}\right)$$
$$y^5=x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{60}\right)\quad y^6=x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{7x^4}{180}+\frac{x^5}{360}\right)\qquad (12)$$
$$y^7=x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{31x^5}{4320}+\frac{x^7}{2520}\right)$$
$$y^8=x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{167x^7}{151200}+\frac{x^8}{20160}\right)$$
$$\vdots$$

Từ đó ta có thể kết luận nghiệm chính xác của phương trình là $y(x)=xe^x$.

3. Phương pháp phân tích Adomian cải tiến giải hệ phương trình vi phân thường

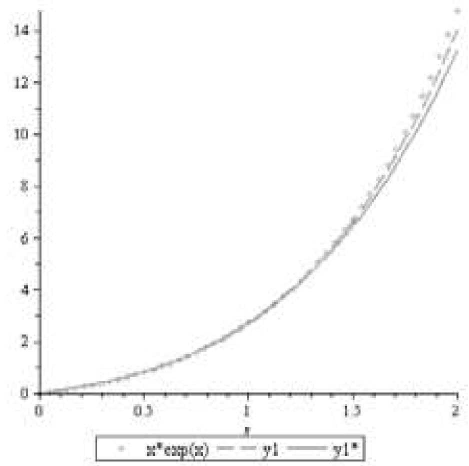
Trong phần này ta đề xuất một sự cải tiến của phương pháp phân tích Adomian. Ta thiết lập

$$y_{10}(x)=c_1+\int_0^x g_1(x)dx,$$
$$y_{1,m+1}(x)=\int_0^x\sum_{j=1}^{n}b_{1j}(x)y_{jm}dx+\int_0^x A_{1m}dx,$$
$$y_{l0}(x)=c_l+\int_0^x g_l(x)dx+\int_0^x\sum_{j=1}^{l-1}b_{lj}(x)y_{j0}dx,\quad l=2,\ldots,n,\qquad (13)$$
$$y_{l,m+1}(x)=\int_0^x\sum_{j=1}^{l-1}b_{lj}(x)y_{jm+1}dx+\int_0^x\sum_{j=l}^{n}b_{lj}(x)y_{jm}dx+\int_0^x A_{lm}^{*}dx,$$

Trong đó A_{lm}^{*} được định nghĩa như sau

$$A^*_{lm}=\begin{cases}A_{lm+1}, & N_l\notin\left(y_l,y_{l+1},\dots,y_n\right),\\ {}^1A_{l,m+1}+{}^2A_{l,m} & N_l={}^1N_l\left(y_1,\dots,y_{l-1}\right)+{}^2N_l\left(y_l,\dots,y_n\right),\quad l=2,3,\dots\\ A_{lm}, & \end{cases}\quad(14)$$

Ở đây ${}^1A_{l,m+1},{}^2A_{l,m}$ là những đa thức Adomian tương ứng với ${}^1N_l$ và ${}^2N_l$ như đã được định nghĩa trong phương trình (4).



Hình 1.

Thí dụ 2: Xét phương trình vi phân phi tuyến cấp ba ở thí dụ 1 với các điều kiện đầu $y(0)=0, y'(0)=1$ và $y''(0)=2$. Phương trình này có nghiệm chính xác là $y(x)=xe^x$

$$y'''=\frac{1}{x}y+y''\quad(15)$$

Đặt

$$y_1(x)=y(x),\ y_2(x)=y'(x),\ y_3(x)=y''(x).\quad(16)$$

Khi đó phương trình (15) chuyển thành hệ ba phương trình vi phân phi tuyến cấp một sau

$$y_1'=y_2,\ y_2'=y_3,\ y_3'=\frac{1}{x}y_1+y_3\quad(17)$$

Hệ này tương đương với hệ phương trình tích phân sau

$$\begin{aligned}&y_1=y_1(0)+\int_0^x y_2\,dx,\ y_2=y_2(0)+\int_0^x y_3dx,\\ &y_3=y_3(0)+\int_0^x\left(\frac{1}{x}y_1+y_3\right)dx,\end{aligned}\quad(18)$$

Áp dụng phương pháp Adomian cải tiến ta có

$$\begin{aligned}&y_{10}=0, && y_{1m+1}=\int_0^x y_{2m}dx\\ &y_{20}=1, && y_{2m+1}=\int_0^x y_{3m}dx\qquad(m=0,1,\dots)\\ &y_{30}=2+\int_0^x\frac{1}{x}y_{10}dx=2, && y_{3m+1}=\int_0^x\left(\frac{1}{x}y_{1m+1}+y_{3m}\right)dx\end{aligned}\quad(19)$$

Những số hạng tiếp theo

$$\begin{aligned}&y_{11}=\int_0^x y_{20}dx=\int_0^x dx=x,\\ &y_{21}=\int_0^x y_{30}dx=\int_0^x 2dx=2x,\\ &y_{31}=\int_0^x\left(\frac{1}{x}y_{11}+y_{30}\right)dx=\int_0^x\left(\frac{1}{x}x+2\right)dx=3x,\end{aligned}\quad(20)$$

$$\begin{aligned}&y_{12}=\int_0^x y_{21}dx=\int_0^x 2xdx=x^2,\\ &y_{22}=\int_0^x y_{31}dx=\int_0^x 3xdx=\frac{3x^2}{2},\\ &y_{32}=\int_0^x\left(\frac{1}{x}y_{12}+y_{31}\right)dx=\int_0^x\left(\frac{1}{x}x^2+3x\right)dx=2x^2,\\ &\vdots\end{aligned}$$

Biazar đã giải thí dụ này sử dụng ADM thường [9]. Ta vẽ đồ thị của $y_1(x)$ và so sánh với nghiệm chính xác, nghiệm được đưa ra bởi phương pháp Adomian thường và nghiệm được đưa ra bởi phương pháp Adomian cải tiến. Trong hình 1, ta vẽ xe^x là những nghiệm chính xác, y_1 ký hiệu nghiệm đạt được bởi ADM cải tiến (sau 5 bước lặp) và y_1^* ký hiệu nghiệm đạt được bởi ADM thường (sau 5 bước lặp).

4. Kết luận

Phân tích Adomian là một phương pháp hữu hiệu dẫn tới một nghiệm chuỗi hội tụ đối với bài toán phi tuyến/ tuyến tính. Phương pháp này tốt hơn phương pháp số, vì không phải làm tròn sai số và không yêu cầu hiệu suất tính toán lớn. Daftardar-Gejji và Jafari gợi ý một sự cải tiến của phương pháp này, được gọi là "ADM cải tiến".

Trong bài báo này, ta sử dụng ADM cải tiến để giải hệ phương trình vi phân thường. Phương pháp cải tiến dẫn tới một nghiệm chuỗi hội tụ nhanh hơn so với ADM thông thường. Những thí dụ mô phỏng đã chứng minh điều này một cách rõ ràng..

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. K. Abboui, Y. Cherruault (1995), "New ideas for proving convergence of decomposition methods", *Comput. Appl. Math.*, 29 (7), pp. 103–105.

[2]. G. Adomian (1994), *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer.

[3]. G. Adomian (1988), "A review of the decomposition method in applied mathematics", *J. Math. Anal. Appl.*, 135, pp. 501–544.

[4]. G. Adomian and R. Rach (1989), "Smooth Polynomial Approximations of Piecewise-differentiable Functions", *Appl. Math. Lett*, 2, pp. 377-379.

[5]. G. Adomian (1986), *Nonlinear Stochastic Operator Equations*, Academic Press.

[6]. G. Adomian (1991), "A Review of the Decomposition Method and Some Recent Results for Nonlinear Equarions", *Comp. and Math. with Applic.*, 21, pp. 101-127.

[7]. T.M. Atanackovic, B. Stankovic (2004), "On a system of differential equations with fractional derivatives arising in rod theory", *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37, pp. 1241–1250.

[8]. E. Babolian, J. Biazar (2000), "Solution of a system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind", *Far East J. Math. Sci.*, 2 (6), pp. 935–945.

[9]. J. Biazar, E. Babolian, R. Islam (2004), "Solution of the system of ordinary differential equations by Adomian decomposition method", *Appl. Math. Comput.*, 147 (3), pp. 713–719.

[10]. Y. Cherrnault (1989), *Convergence of Adomian's Method*, Kyberneres, 18, pp. 31 -38.

[11]. V. Daftardar-Gejji, H. Jafari (2005), "Adomian decomposition: a tool for solving a system of fractional differential equations", *J. Math. Anal. Appl.*, 301 (2), pp. 508–518.

[12]. L. Gabet, Equisse d'une theorie decompositionelle, *Modtlisation Marhtrnatique et Analyse Numerique*, in publication.

[13]. H. Jafari, V. Daftardar-Gejji, "Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition", *J.Comput. Appl. Math.*, in press.

[14]. H. Jafari, V. Daftardar-Gejji (2006), "Revised Adomian decomposition method for solving a system of nonlinear equations", *Appl. Math.Comput.*, 175 (1), pp. 1–7.