

DAY HỌC GIẢI BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT QUA MAPLE WORKSHEETS TRONG PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

NGUYỄN KHẢI HOÀN
Trường Đại học Bạc Liêu

Nhận bài ngày 28/02/2023. Sửa chữa xong 04/3/2023. Duyệt đăng 08/3/2023.

Abstract

Maple is a robust calculation system based on algebraic expressions and mathematical illustrations developed by researchers at the University of Waterloo (Canada) in 1980 and commercialized by Waterloo Maple Inc. Maple is an effective support program for teachers and students in teaching and learning. In this article, the authors present a problem encountered in teaching partial differential equations using Maple worksheets at Bac Lieu University about heat transfer problems.

Keywords: Maple Worksheet, one-dimensional heat equation, eigenvalues, homogeneous diffusion equation.

1. Đặt vấn đề

Bài báo giới thiệu ngắn gọn về mã lệnh để người đọc có thể dễ dàng thiết lập worksheet mới cho lời giải bài toán khác. Nhiều nỗ lực đã được đưa vào việc sử dụng số lượng lệnh tối thiểu và tránh các thủ tục có thể không quen thuộc với những người chưa từng sử dụng Maple trước đây. Mục đích chính của tác giả là để dạy Toán học, không phải dạy mã lệnh máy tính. Một số lệnh macro của Maple không được sử dụng trong bài báo này vì chúng không hỗ trợ học Toán.

Ví dụ, trong giải phương trình vi phân thường, Maple có một lệnh "dsolve" là có thể giải quyết được toàn bộ vấn đề. Thay vào đó, lời giải ở đây được phát triển theo cách điển hình được tìm thấy trong các văn bản toán học kiểu truyền thống. Các thủ tục lệnh được trình bày ở đây là cơ sở cấu thành lệnh "dsolve". Tác giả tin rằng khi làm theo cách này, trọng tâm chính là học Toán và sử dụng mã Maple chỉ để để tính toán và sử dụng một số lệnh macro của Maple chỉ như một phương tiện để kiểm tra các lời giải.

Trong bài báo này, tác giả giới thiệu các lệnh Maple qua các ví dụ và trực quan hóa kết quả đầu ra. Lưu ý rằng, tất cả các lệnh Maple trong đây được sử dụng cho các phiên bản từ Maple 12 trở lên. Trong nội dung của bài viết này, tác giả viết về hai dạng bài toán nhiệt thuần nhất trong tọa độ hình chữ nhật và tọa độ trụ.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Giới thiệu bài toán nhiệt thuần nhất một chiều trong tọa độ hình chữ nhật

Phương trình vi phân đạo hàm riêng này cho hiện tượng khuếch tán hoặc nhiệt được đặc trưng là nó liên hệ đạo hàm riêng cấp một đối với biến thời gian với đạo hàm riêng cấp hai đối với biến không gian.

Phương trình có dạng: $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = k \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right]$ $I = \{x \mid a < x < b\}$ có điều kiện: $\kappa_1 u(a, t) + \kappa_2 u_x(a, t) = 0$, $\kappa_3 u(b, t) + \kappa_4 u_x(b, t) = 0$ và điều kiện ban đầu: $u(x, 0) = f(x)$

Bằng phương pháp tách biến [2], [3], ta có: $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, ta có: $\frac{d}{dt} T(t) + k\lambda T(t) = 0$ và $\frac{d^2}{dx^2} X(x) + \lambda X(x) = 0$, với λ là hằng số

Từ điều kiện biên, ta có: $\kappa_1 X(a)T(t) + \kappa_2 X_x(a)T(t) = 0$ và $\kappa_3 X(b)T(t) + \kappa_4 X_x(b)T(t) = 0$

Email: nkhoan@blu.edu.vn

Từ bài toán Sturm-Liouville [3]: $\frac{d^2}{dx^2} X(x) + \lambda X(x) = 0$ và điều kiện: $\kappa_1 X(a) + \kappa_2 X_x(a) = 0$ và $\kappa_3 X(b) + \kappa_4 X_x(b) = 0$

Ta tìm được các giá trị riêng và các hàm riêng tương ứng được đưa ra, tương ứng, như sau: $\lambda_n, X_n(x)$, với $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Ta có: $\int_a^b X_n(x) X_m(x) dx = \delta(n, m)$, trong đó $\delta(n, m)$ là hàm delta Kronecker quen thuộc.

Từ phương trình: $\frac{d}{dt} T(t) + k\lambda T(t) = 0$, ta có: $T_n(t) = C(n)e^{-k\lambda_n t}$, trong đó $C(n)$ là hằng số cần tìm.

Ta có dãy nghiệm: $u_n(x, t) = X_n(x)C(n)e^{-k\lambda_n t}$.

Ta có thể viết nghiệm tổng quát của phương trình đạo hàm riêng thuần nhất dưới dạng chuỗi

$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)C(n)e^{-k\lambda_n t}$. Các hệ số chưa biết $C(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ được tìm từ hàm điều kiện ban đầu áp đặt cho bài toán. Ta có: $u(x, 0) = f(x)$. Suy ra $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)C(n)$. Suy ra, $C(m) = \int_a^b f(x)X_m(x)dx$. Suy ra $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)e^{-k\lambda_n t} \left(\int_a^b f(s)X_n(s)ds \right)$

Sự phát triển chi tiết của nghiệm cho bài toán dạng này và đồ thị của nó được đưa ra trong các ví dụ về Maple Worksheet được nghiên cứu ở mục 2.

Các Maple Worksheet được thể hiện dưới dạng các giá trị tổng quát cho độ dài, độ khuếch tán và hàm điều kiện ban đầu $u(x, 0) = f(x)$. Lý do cho sự khái quát hóa là để sinh viên hoặc người thực hành bài toán có thể thay đổi các giá trị này theo ý muốn cho các ứng dụng khác nhau.

2.2. Giới thiệu bài toán nhiệt thuần nhất một chiều trong tọa độ trụ

Bài toán có dạng: $\frac{\partial}{\partial t} u(r, t) = \frac{k \left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, t) + r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, t) \right) \right)}{r}$ $I = \{r | a < r < b\}, |u(a, t)| < \infty,$

$\kappa_1 u(b, t) + \kappa_2 u_r(b, t) = 0$ và $u(r, 0) = f(r)$. Ta có: $u(r, t) = R(r)T(t)$. Từ đó, ta có hai phương trình vi phân thường với λ^2 là hằng số: $\frac{d}{dt} T(t) + k\lambda^2 T(t) = 0$ và $\frac{d^2}{dr^2} R(r) + \frac{d}{dr} \frac{R(r)}{r} + \lambda^2 R(r) = 0$

[3] Từ phương trình vi phân thứ hai ta có các giá trị riêng và các hàm riêng tương ứng là: $\lambda_n, R_n(r)$ với $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Ta có: $\int_a^b R_n(r)R_m(r)rdr = \delta(n, m)$, với $\delta(n, m)$ là hàm Kronecker

Từ phương trình vi phân thứ nhất, ta có: $T_n(t) = C(n)e^{-k\lambda_n^2 t}$, trong đó $C(n)$ là các hệ số cần tìm.

Ta có dãy nghiệm của bài toán là: $u_n(r, t), n = 0, 1, 2, 3, \dots$ $u_n(r, t) = R_n(r)C(n)e^{-k\lambda_n^2 t}$

Nghiệm tổng quát của bài toán ở dạng chuỗi là: $u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)C(n)e^{-k\lambda_n^2 t}$

Ta có: $C(m) = \int_a^b f(r)R_m(r)rdr$.

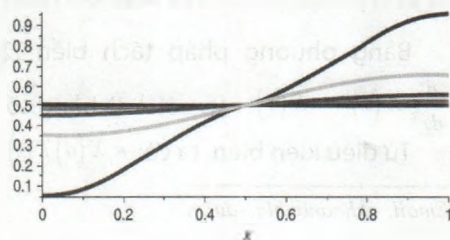
Do đó, nghiệm tổng quát là: $u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)e^{-k\lambda_n^2 t} \left(\int_a^b f(s)R_n(s)sds \right)$

Sự phát triển chi tiết cho lời giải của bài toán này cùng với đồ thị sẽ được nghiên cứu trong các ví dụ qua Maple Worksheet.

2.3. Maple worksheet cho bài toán nhiệt thuần nhất một chiều trong tọa độ hình chữ nhật

Ví dụ 1

Chúng ta lại xem xét sự phân bố nhiệt độ $u(x, t)$ trong một thanh mỏng trong khoảng $I = \{x | 0 < x < 1\}$ có bề mặt



bên được cách nhiệt. Cả hai đầu bên trái và bên phải của thanh đều được cách nhiệt. Sự phân bố nhiệt độ ban đầu là $f(x) = x$, độ khuếch tán là $k = 1/10$ và điều kiện: $u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0$

Giải: Phương trình khuếch tán thuần nhất là: $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$. Có điều kiện là: $u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0, u(x, 0) = x$

Bằng phương pháp tách biến [1], [3], ta có hai phương trình vi phân: $\frac{d}{dt} T(t) + k\lambda T(t) = 0$, $\frac{d^2}{dx^2} X(x) + \lambda X(x) = 0$ với điều kiện là: $X_x(0) = 0, X_x(1) = 0$

Sử dụng Maple worksheet như sau: `> restart; with(plots): a:=0:b:=1:k:=1/10: > lambda[0]:=0;  $\lambda_0 := 0$`

Xét $n = 0$.. Hàm trục giao ứng với $n = 0$ `> X[0](x):=1/sqrt(b);  $X_0(x) := 1$`

Xét $n = 1, 2, 3, \dots$ `> lambda[n]:=(n*Pi/b)^2;  $\lambda_n := n^2 \pi^2$`

Các hàm trục giao là: `> X[n](x):=sqrt(2/b)*cos(n*Pi/b*x); X[m](x):=subs(n=m, X[n](x)):`
 `$X_n(x) := \sqrt{2} \cos(n\pi x)$`

Tính trục giao ứng với hàm trọng số $w(x) = 1$ `> w(x):=1: Int(X[n](x)*X[m](x)*w(x), x=a..b)=delta(n,m);`
 `$\int_0^1 2 \cos(n\pi x) \cos(m\pi x) dx = \delta(n, m)$`

Nghiệm phụ thuộc thời gian ứng với $n = 1, 2, 3, \dots$ `> T[n](t):=C(n)*exp(-k*lambda[n]*t);`
 `$T_n(t) := C(n) e^{-\frac{1}{10} n^2 \pi^2 t}$`

Số hạng tổng quát của chuỗi là: `> u[n](x,t):=T[n](t)*X[n](x);  $u_n(x, t) := C(n) e^{-\frac{1}{10} n^2 \pi^2 t} \sqrt{2} \cos(n\pi x)$`

Với $n = 0$, ta có: `> T[0](t):=eval(subs(n=0, T[n](t))); u[0](x,t):=T[0](t)*X[0](x);  $T_0(t) := C(0)$`

Nghiệm tổng quát của bài toán là `> u(x,t):=u[0](x,t)+Sum(u[n](x,t), n=1..infinity);`
 `$u(x, t) := C(0) + \sum_{n=1}^{\infty} C(n) e^{-\frac{1}{10} n^2 \pi^2 t} \sqrt{2} \cos(n\pi x)$`

Đánh giá các hệ số Fourier [2], [3] cho điều kiện ban đầu như sau: `> f(x):=x; f(x):=x`
`> C(n):=Int(f(x)*X[n](x)*w(x), x=a..b); C(n):=expand(value(%));  $C(n) := \int_0^1 x \sqrt{2} \cos(n\pi x) dx$`
 `$C(n) := \text{radsimp}(\text{subs}(\{\sin(n\pi) = 0, \cos(n\pi) = (-1)^n\}, C(n)))$ ;  $C(n) := \frac{\sqrt{2}(-1 + (-1)^n)}{n^2 \pi^2}$`
`> C(0):=Int(f(x)*X[0](x)*w(x), x=a..b); C(0):=expand(value(%));  $C(0) := \int_0^1 x dx$`
`> C(0):=value(%);  $C(0) := \frac{1}{2}$`
`> u[0](x,t):=eval(T[0](t)*X[0](x));`

Số hạng tổng quát của chuỗi là: `> u[n](x,t):=eval(T[n](t)*X[n](x));  $u_n(x, t) := \frac{2(-1 + (-1)^n) e^{-\frac{1}{10} n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi x)}{n^2 \pi^2}$`

Nghiệm tổng quát của bài toán [1], [2] là: `> u(x,t):=eval(u[0](x,t)+Sum(u[n](x,t), n=1..infinity));`

`$u(x, t) := \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1 + (-1)^n) e^{-\frac{1}{10} n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi x)}{n^2 \pi^2}$`

Biểu diễn ảnh động cho nghiệm bài toán như sau: Một vài số hạng đầu tiên của tổng `> u(x,t):=eval(u[0](x,t)+sum(u[n](x,t), n=1..3));`
`> animate(u(x,t), x=a..b, t=0..4, color=red, thickness=3);`

Lệnh tạo ảnh động minh họa cho nghiệm bài toán phụ thuộc vào không gian-thời gian trong $u(x, t)$. Trình tự hoạt hình được hiển thị trong Hình 2 hiển thị các ảnh chụp nhanh vào các thời điểm $t = 0, 1, 2, 3, 4$ và 5.

Trình tự hoạt hình: `> u(x,0):=subs(t=0, u(x,t)); u(x,1):=subs(t=1, u(x,t));`
`> u(x,2):=subs(t=2, u(x,t)); u(x,3):=subs(t=3, u(x,t));`
`> u(x,4):=subs(t=4, u(x,t)); u(x,5):=subs(t=5, u(x,t));`
`> plot({u(x,0), u(x,1), u(x,2), u(x,3), u(x,4), u(x,5)}, x=a..b, thickness=10);`

2.4. Maple worksheet cho bài toán nhiệt thuần nhất một chiều trong tọa độ trụ

Bây giờ chúng ta xem xét một số ví dụ về phương trình đạo hàm riêng cho hiện tượng nhiệt hoặc khuếch tán trong các điều kiện biên đồng nhất khác nhau trong các khoảng hữu hạn trong hệ tọa độ hình trụ. Chúng ta lưu ý rằng tất cả các phương trình vi phân thường trong không gian trong hệ tọa độ trụ đều thuộc loại Bessel và nghiệm là các hàm Bessel loại một.

Ví dụ 2

Tìm sự phân bố nhiệt độ $u(r, t)$ trong một tấm mỏng đối xứng hình tròn trong khoảng $I = \{r \mid 0 < r < 1\}$ mà bề mặt bên của nó được cách nhiệt. Ngoại vi (cạnh) của tấm ở nhiệt độ cố định bằng không. Sự phân bố nhiệt độ ban đầu $f(r) = 1 - r^2$, độ khuếch tán là $k = 1/20$, và có điều kiện $|u(0, t)| < \infty, u(1, t) = 0$.

Giải: Phương trình khuếch tán thuần nhất là:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(r, t) = \frac{k \left[\frac{\partial}{\partial r} u(r, t) + r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, t) \right) \right]}{r} \quad \text{Có điều kiện là: } |u(0, t)| < \infty, u(1, t) = 0, u(r, 0) = 1 - r^2$$

Bằng phương pháp tách biến[1],[3], ta có hai phương trình vi phân: $\frac{d}{dt} T(t) + k\lambda^2 T(t) = 0$,

$$\frac{d^2}{dr^2} R(r) + \frac{dr R(r)}{r} + \lambda^2 R(r) = 0 \quad \text{với điều kiện là: } |R(0)| < \infty, R(1) = 0$$

Sử dụng Maple worksheet như sau: > restart; with(plots): a:=0:b:=1:k:=1/20:> BesselJ(0, lambda[n]*b)=0; BesselJ(0, lambda[n])=0 với $n = 1, 2, 3, \dots$

Các hàm riêng trực giao là: > R[n](r):=simplify(BesselJ(0, lambda[n]*r)/sqrt(int(BesselJ(0, lambda[n]*r)^2*r, r=a..b))); $R_n(r) := \frac{BesselJ(0, \lambda_n r) \sqrt{2}}{\sqrt{BesselJ(0, \lambda_n)^2 + BesselJ(1, \lambda_n)^2}}$

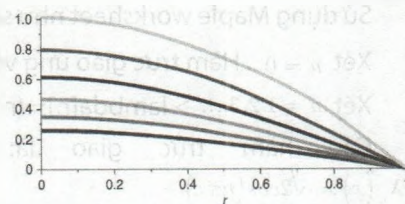
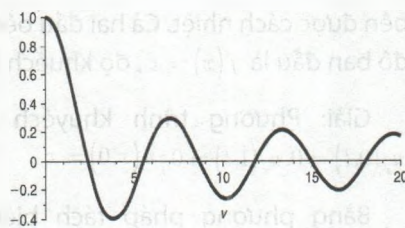
Suy ra: > R[n](r):=radsimp(subs(BesselJ(0, lambda[n])=0, R[n](r))); R[m](r):=subs(n=m, R[n](r)); $R_n(r) := \frac{BesselJ(0, \lambda_n r) \sqrt{2}}{BesselJ(1, \lambda_n)}$

Tính trực giao [3] ứng với hàm trọng số $w(r) = r > w(r) := r \cdot \text{Int}(R[n](r) \cdot R[m](r) \cdot w(r), r=a..b) = \delta(n, m)$; $\int_0^1 \frac{2 BesselJ(0, \lambda_n r) BesselJ(0, \lambda_m r) r}{BesselJ(1, \lambda_n) BesselJ(1, \lambda_m)} dr = \delta(n, m)$

Nghiệm phụ thuộc vào thời gian là: > T[n](t):=C(n)*exp(-k*lambda[n]^2*t); u[n](r, t):=T[n](t)*R[n](r); $T_n(t) := C(n) e^{-\frac{1}{20} \lambda_n^2 t}$

Số hạng tổng quát của chuỗi là: > u[n](r, t):=T[n](t)*R[n](r); $u_n(r, t) := \frac{C(n) e^{-\frac{1}{20} \lambda_n^2 t} BesselJ(0, \lambda_n r) \sqrt{2}}{BesselJ(1, \lambda_n)}$

Nghiệm tổng quát của bài toán là: > u(r, t):=Sum(u[n](r, t), n=1..infinity); $u(r, t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(n) e^{-\frac{1}{20} \lambda_n^2 t} BesselJ(0, \lambda_n r) \sqrt{2}}{BesselJ(1, \lambda_n)}$



Đánh giá các hệ số Fourier cho điều kiện ban đầu như sau: $f(r) := 1 - r^2$; $f(r) := 1 - r^2 >$
 $C(n) := \text{Int}(f(r) * R[n](r) * w(r), r=a..b)$; $C(n) := \int_0^1 \frac{(1-r^2) BesselJ(0, \lambda_n r) \sqrt{2} r}{BesselJ(1, \lambda_n)} dr$

Suy ra: $C(n) := \text{simplify}(\text{subs}(BesselJ(0, \lambda[n])=0, \text{value}(\%)))$; $u[n](r, t) := \text{eval}(T[n](t) * R[n](r))$; $C(n) := \frac{4\sqrt{2}}{\lambda_n^3}$

Số hạng tổng quát của chuỗi là: $u[n](r, t) := \text{eval}(T[n](t) * R[n](r))$; $u_n(r, t) := \frac{8e^{-\frac{1}{20}\lambda_n^2 t} BesselJ(0, \lambda_n r)}{\lambda_n^3 BesselJ(1, \lambda_n)}$

Nghiệm tổng quát của bài toán [1], [2], là: $u(r, t) := \text{Sum}(u[n](r, t), n=1..infinity)$;

$$u(r, t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8e^{-\frac{1}{20}\lambda_n^2 t} BesselJ(0, \lambda_n r)}{\lambda_n^3 BesselJ(1, \lambda_n)}$$

Ta có: $BesselJ(0, \lambda[n]*b)=0$; $BesselJ(0, \lambda_n) = 0$ $> \text{plot}(BesselJ(0, v), v=0..20, \text{thickness}=10)$;

Nếu ta đặt $v = \lambda b$ thì các giá trị riêng được tìm thấy từ các giao điểm của đường cong với trục v như trong hình 3. Tôi đánh giá một vài trong số các giá trị riêng này bằng cách sử dụng lệnh Maple `fsolve` như sau: $\lambda_1 := (1/b) * \text{fsolve}(BesselJ(0, v)=0, v=0..3)$; $\lambda_1 := 2.404825558$ $> \lambda_2 := (1/b) * \text{fsolve}(BesselJ(0, v)=0, v=3..6)$; $\lambda_2 := 5.520078110$ $> \lambda_3 := (1/b) * \text{fsolve}(BesselJ(0, v)=0, v=6..9)$; $\lambda_3 := 8.653727913$

Biểu diễn ảnh động cho nghiệm bài toán như sau: Một vài số hạng đầu tiên của tổng $u(r, t) := \text{eval}(\text{sum}(u[n](r, t), n=1..3))$: $> \text{animate}(u(r, t), r=a..b, t=0..5, \text{thickness}=3)$;

Lệnh tạo ảnh động minh họa cho nghiệm bài toán phụ thuộc vào không gian-thời gian cho $u(r, t)$. Trình tự hoạt hình được hiển thị trong Hình 4 hiển thị các ảnh chụp nhanh vào các thời điểm $t = 0, 1, 2, 3, 4$, và 5

Trình tự hoạt hình $> u(r, 0) := \text{subs}(t=0, u(r, t))$; $u(r, 1) := \text{subs}(t=1, u(r, t))$; $> u(r, 2) := \text{subs}(t=2, u(r, t))$; $u(r, 3) := \text{subs}(t=3, u(r, t))$; $> u(r, 4) := \text{subs}(t=4, u(r, t))$; $u(r, 5) := \text{subs}(t=5, u(r, t))$; $> \text{plot}(\{u(r, 0), u(r, 1), u(r, 2), u(r, 3), u(r, 4), u(r, 5)\}, r=a..b, \text{thickness}=10)$;

3. Kết luận

Định hướng dạy nội dung bài toán truyền nhiệt trong học phần “Phương trình đạo hàm riêng” có hỗ trợ bởi Maple Worksheet là công việc hết sức cần thiết, góp phần nâng cao chuyên môn, nghiệp vụ của giảng viên trong dạy học toán, trước yêu cầu đổi mới nội dung và phương pháp dạy học toán ở đại học hiện nay. Để việc định hướng có hiệu quả cần có sự tích cực của giảng viên, sinh viên trong quá trình học tập nghiên cứu học phần “Phương trình đạo hàm riêng”. Đặc biệt, đối với người học cần rèn luyện kiến thức tin học (vận dụng phần mềm Maple), toán học thường xuyên để việc học môn “Phương trình đạo hàm riêng” tại trường đại học có hiệu quả cao nhất. Mục đích sử dụng Maple Worksheet là để thực hiện các nhiệm vụ của tích hợp và đồ họa. Các lệnh Maple để thực hiện các nhiệm vụ này là trực quan và dễ nhớ để sinh viên gần như trở thành chuyên gia ngay lập tức. Do đó, việc sử dụng phần mềm máy tính mạnh mẽ này sẽ giúp sinh viên có thể dành nhiều thời gian hơn để sáng tạo toán học.

Tài liệu tham khảo

- [1] Phạm Huy Điển (2002), *Tính toán, lập trình và giảng dạy Toán học trên Maple*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [2] Char, B.W., Geddes, K.O., Gonnet, G.H., Leong, B.L., Monagan, M.B., Watt, S.M. (1991), *Maple V Language Reference Manual (Hướng dẫn tham khảo ngôn ngữ Maple V)*, Springer-Verlag.
- [3] Monagan M.B., Geddes K.O., Heal K.M., Labahn G., Vorkoetter S.M., Carron J., DeMarco P. (2007), *Maple Introductory Programming Guide (Hướng dẫn lập trình nhập môn Maple)*, Canada.