

DAO ĐỘNG CỦA DẦM SANDWICH CHỊU TẢI TRỌNG XUNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

ThS. TRẦN THẾ HIỆP

Khoa Công Trình, Trường Đại học giao thông vận tải

TÓM TẮT:

Nghiên cứu này tìm lời giải bài toán động lực học dầm sandwich đơn giản chịu tải trọng xung. Phương trình dao động được thiết lập và giải dựa trên nguyên lý xếp chồng các dạng dao động riêng. Kết quả tính toán đưa ra biểu thức của chuyển vị ở dạng nghiệm chính xác.

Từ khóa: Dầm sandwich, dao động, tải trọng xung

ABSTRACT:

This paper deals with the dynamic responses of sandwich beams using the analytical method. Governing equation solved by superposition approach. The solution given the closed-form displacements of beam.

Keyword: sandwich beam, dynamic, impulse

phi tuyến hình học bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Lezgy-Nazargah [14] đã phân tích dao động của dầm sandwich có lớp áp điện bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Zhicheng Huang và cộng sự [15] đã nghiên cứu dao động của dầm có lớp giữa nhớt bằng phương pháp phần tử hữu hạn và thực nghiệm. Huang Zhicheng và cộng sự [16] đã thực hiện so sánh các kỹ thuật phân tích động lực học dầm sandwich xét đến tính chất đàn nhớt của vật liệu.

Bài báo này tập trung nghiên cứu dao động của dầm sandwich đơn giản chịu tải trọng xung dạng phân bố đều sử dụng phương pháp xếp chồng các dạng dao động riêng.

2. PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG

Mặt cắt dầm sandwich gồm 3 lớp điển hình như hình 1.

Giả thiết phân bố biến dạng tuyến tính theo lý thuyết dầm cổ điển Euler -Bernoulli như trên hình 2.

Biểu thức tính mô men trên mặt cắt ngang dầm

$$M = \int_A y \sigma_x dA \tag{1}$$

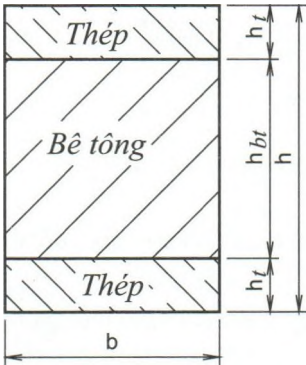
Sử dụng giả thiết phân bố ứng suất, biến dạng tuyến tính trên mặt cắt

1. MỞ ĐẦU

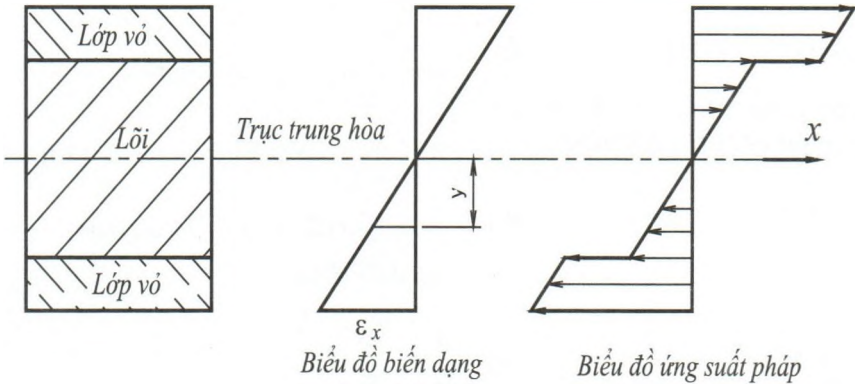
Dầm sandwich sử dụng hai vật liệu có đặc trưng khác nhau phối hợp làm việc tạo ra kết cấu tối ưu, có khả năng chịu tải tốt mà giá rẻ nên được sử dụng khá phổ biến để tạo thành thành phần cơ bản của các kết cấu trong kỹ thuật như hàng không vũ trụ [1, 2], xây dựng [2-4], các thiết bị cơ khí và các ngành công nghiệp [5-7].

Nghiên cứu tính toán dầm nói chung và dầm composite đã được nhiều tác giả nghiên cứu, có thể sử dụng phương pháp giải tích, phương pháp số như phần tử hữu hạn, sai phân hữu hạn để tính toán.. Nguyễn Trần Hiếu và cộng sự [8] đã mô phỏng số để tìm hiểu sự làm

việc của dầm bê tông cốt thép liên hợp có khoét lỗ. Sadek Edward [9] đã nghiên cứu tính tối ưu hóa trọng lượng của dầm sandwich. Yury Solyaev và cộng sự [10] đã nghiên cứu thực nghiệm tĩnh, động của dầm sandwich có lõi dạng mạng lưới. Swanson Stephen [11] đã sử dụng lý thuyết cắt bậc cao tính dầm sandwich bằng phương pháp giải tích. Trong nghiên cứu tiếp theo, Swanson Stephen và cộng sự [12] đã tính và so sánh nội lực chuyển vị của dầm sandwich tính bằng phương pháp phần tử hữu hạn và lời giải từ lý thuyết đàn hồi. Với bài toán động lực học, Vallala, Ruimi [13] đã nghiên cứu dao động của dầm composite đàn nhớt có xét đến biến dạng cắt bậc ba và



Hình 1. Mặt cắt ngang dầm sandwich điển hình



Hình 2. Biểu đồ phân bố ứng suất biến dạng trên mặt cắt ngang dầm sandwich

ngang ta có mối quan hệ mô-men và độ võng của dầm sandwich:

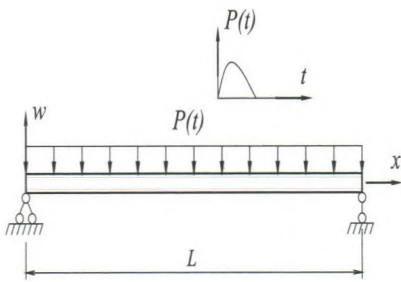
$$M = -D \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (2)$$

Trong đó w_0 là độ võng của dầm ở mặt giữa dầm, M là mô men uốn với trục y .

Độ cứng D sẽ được xác định như sau:

$$D = \int_A E_{loy} y^2 dA + \int_A E_{lop-v0} y^2 dA \quad (3)$$

Nghiên cứu dầm sandwich chịu tải trọng xung phân bố đều như hình 3.



Hình 3. Mô hình dầm sandwich trên nền đàn nhớt

Sử dụng nguyên lý Hamilton ta thiết lập phương trình vi phân dao động tự do của dầm sandwich trên nền đàn nhớt:

$$D \frac{\partial^4 w_0(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial t^2} = P(t) \quad (4)$$

Đầu tiên tính tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng. Phương trình này thường giải bằng phương pháp tách biến. Chuyển vị thẳng đứng được biểu diễn thành tích của 2 hàm thời gian và không gian:

$$w_0(x,t) = W(x)T(t) \quad (5)$$

Phương trình (4) sẽ thành hai phương trình vi phân thường:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - k^4 W = 0 \quad (6)$$

và:

$$\ddot{T} + \frac{Dk^4}{m} T = 0 \quad (7)$$

Nghiệm của phương trình (6):

$$W = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx + c_3 e^{kx} + c_4 e^{-kx} \quad (8)$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng có dạng phức:

$$x_{1,2} = \pm j\omega \quad (9)$$

với j là đơn vị ảo

$$\omega = \sqrt{\frac{Dk^4}{m}} \quad (10)$$

Nghiệm của phương trình vi phân (7) sẽ có dạng:

$$T = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (11)$$

Để tiện tính toán, ta để biên độ A là đơn vị và khi đó hàm $T(t)$:

$$T = \sin(\omega t + \varphi) \quad (12)$$

Tính các đạo hàm của hàm riêng $W(x)$:

$$\begin{aligned} W' &= k(c_1 \cos kx - c_2 \sin kx + c_3 e^{kx} - c_4 e^{-kx}) \\ W'' &= k^2(-c_1 \sin kx - c_2 \cos kx + c_3 e^{kx} + c_4 e^{-kx}) \\ W''' &= k^3(-c_1 \cos kx + c_2 \sin kx + c_3 e^{kx} - c_4 e^{-kx}) \\ W^{(4)} &= k^4(c_1 \sin kx + c_2 \cos kx + c_3 e^{kx} + c_4 e^{-kx}) \end{aligned} \quad (13)$$

Áp điều kiện biên với dầm đơn giản:

Tại $x = 0$ chuyển vị và mô men bằng không:

$$\begin{aligned} W = 0 &\Rightarrow c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ W'' = 0 &\Rightarrow -c_2 + c_3 + c_4 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Giải ra sẽ có

$$k = i \frac{\pi}{l} \quad \text{với } i = 1, 2, \dots$$

Hàm riêng ứng với "mode i ":

$$W_i(x) = c_{li} \sin kx = c_{li} \sin\left(i \frac{\pi}{l} x\right) \quad (15)$$

Các hàm riêng có tính trực giao.

Dễ thấy rằng:

$$\int_0^l \sin\left(i \frac{\pi}{l} x\right) \sin\left(j \frac{\pi}{l} x\right) dx = 0 \quad \forall i \neq j \quad (16)$$

Khi $i = j$ thì:

$$\int_0^l \sin^2\left(i \frac{\pi}{l} x\right) dx = \frac{l}{2} \quad (17)$$

Khi hệ chịu tải trọng xung, phương trình dao động có dạng:

$$D \frac{\partial^4 w_0(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial t^2} = P(t) \quad (18)$$

Nghiệm của phương trình có dạng chuỗi như sau:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) T_i(t)$$

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) T_i(t) \quad (19)$$

Ta thay vào phương trình:

$$EI \sum_{i=0}^{\infty} W_i^{(4)} T_i + m \sum_{i=0}^{\infty} W_i \ddot{T}_i = P(t)$$

$$EI \sum_{i=0}^{\infty} W_i^{(4)} T_i + m \sum_{i=0}^{\infty} W_i \ddot{T}_i = P(t) \quad (20)$$

Nhân cả hai vế của phương trình với hàm riêng $W_i(x)$, lấy tích phân trên đoạn $[0, l]$ và chú ý là các hàm riêng này trực giao, đồng thời

$$W_i^{(4)}(x) = (k_i)^4 W_i(x) \quad (21)$$

$$W_i^{(4)}(x) = (k_i)^4 W_i(x)$$

nên ta sẽ có:

$$\begin{aligned} EI(k_i)^4 T_i \int_0^l (W_i)^2 dx + m \ddot{T}_i \int_0^l (W_i)^2 dx \\ = \int_0^l [W_i P(t)] dx \end{aligned} \quad (22)$$

Ta tính các tích phân trong (22):

$$\int_0^l [W_i P(t)] dx = S \int_0^l \sin\left(i \frac{\pi}{l} x\right) dx = \frac{2}{\pi} S \delta(t)$$

với $i = 2n - 1$

$$\int_0^l (W_i)^2 dx = \int_0^l \sin^2\left(i \frac{\pi}{l} x\right) dx = \frac{l}{2}$$

Với S là diện tích của biểu đồ xung lực

Phương trình với hàm thời gian:

$$\ddot{T}_i + \frac{EI(k_i)^4}{m} T_i = \frac{4}{\pi ml} S \delta(t) \quad (23)$$

Phương trình (23) có nghiệm là:

$$T(t) = \frac{4S}{\pi m l \omega} \sin(\omega t) \tag{24}$$

Vậy chuyển vị của dầm là:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{4S}{\pi m l \omega} \sin\left((2i-1)\frac{\pi}{l}x\right) \sin(\omega t) \right\} \tag{25}$$

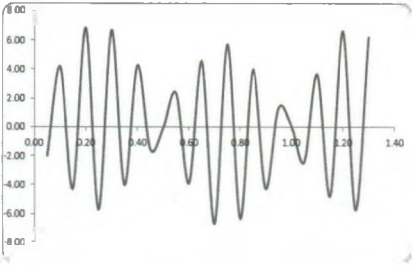
3. VÍ DỤ TÍNH TOÁN

Xét trường hợp dầm sandwich tựa đơn chịu tải trọng xung phân bố đều như hình 3. Dầm gồm 2 lớp thép tấm phía ngoài, lõi bằng bê tông, lớp ngoài bằng thép như mô tả trên hình 1.

Thông số kích thước dầm: chiều dài dầm $L=10\text{m}$, chiều cao dầm $h=60\text{cm}$, $b=30\text{cm}$, bản thép dày $h_t=1\text{cm}$.

Bảng 1: Bảng tính chất của vật liệu dầm sandwich.

	Vật liệu	Khối lượng riêng (kg/m³)	Mô đun đàn hồi (GPa)
Lớp biên	Thép	7800	200
Lõi	Bê tông	2400	30



Hình 4. Biểu đồ độ võng (mm) tại giữa dầm theo thời gian

Kết quả tính toán cho thấy rõ dầm dao động gần như dạng điều hòa trong từng khoảng thời gian ngắn.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày lời giải bằng phương pháp giải tích tính dao động của dầm sandwich tựa đơn chịu tải trọng xung. Các chuyển vị khai triển dưới dạng các chuỗi vô hạn khai triển theo các dạng dao động riêng, sử dụng tính chất trực giao của các dạng dao động riêng để tìm các phản ứng dao động. Kết quả đưa ra được biểu thức dạng chính xác chuyển vị của dầm theo thời gian.■

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Castanie B, Bouvet C, Ginot M. Review of composite sandwich structure in aeronautic applications. Composites Part C: Open Access. 2020;1:100004.

[2] Campbell FC. Chapter 8 - Adhesive Bonding and Integrally Cocured Structure: A Way to Reduce Assembly Costs through Parts Integration. In: Campbell FC, editor. Manufacturing Processes for Advanced Composites. Amsterdam: Elsevier Science; 2004. p. 241-301.

[3] Chapter 10 - Sandwich structures. In: Ashby MF, Evans AG, Fleck NA, Gibson LJ, Hutchinson JW, Wadley HNG, editors. Metal Foams. Burlington: Butterworth-Heinemann; 2000. p. 113-49.

[4] Hieu NT, Cuong LT. Gia cường kết cấu bê tông cốt thép bằng vật liệu tấm sợi composite: NXB Xây Dựng, 2020.

[5] Hause TJ. Introduction. Sandwich Structures: Theory and Responses. Cham: Springer International Publishing; 2021. p. 1-5.

[6] Břrsan M, Sadowski T, Marsavina L, Linul E, Pietras D. Mechanical behavior of sandwich composite beams made of foams and functionally graded materials. International Journal of Solids and Structures. 2013;50:519-30.

[7] Campbell FC. Manufacturing Processes for Advanced Composites: Elsevier Science, 2003.

[8] Nguyen T-H, Nguyen K, Hoàng N. Phân tích sự làm việc của dầm liên hợp thép-bê tông khoét lỗ bản bụng bằng phương pháp mô phỏng số. 2020.

[9] Sadek EA. Dynamic optimization of a sandwich beam. Computers & Structures. 1984;19:605-15.

[10] Solyaev Y, Babaytsev A, Ustenko A, Ripetskiy A, Volkov A. Static and dynamic response of sandwich beams with lattice and pantographic cores. Journal of Sandwich Structures & Materials. 2022;24:1076-98.

[11] Swanson SR. An examination of a higher order theory for sandwich beams. Composite Structures. 1999;44:169-77.

[12] Swanson SR, Kim J. Comparison of a Higher Order Theory for Sandwich Beams with Finite Element and Elasticity Analyses. 2000;2:33-49.

[13] Vallala V, Ruimi A, Reddy JN. Nonlinear viscoelastic analysis of orthotropic beams using a general third-order theory. Composite Structures. 2012;94:3759-68.

[14] Lezgy-Nazargah M. Efficient coupled refined finite element for dynamic analysis of sandwich beams containing embedded shear-mode piezoelectric layers. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2016;23:337-52.

[15] Huang Z, Pan J, Yang Z, Wang X, Chu F. Transverse Vibration of Viscoelastic Sandwich Structures: Finite Element Modeling and Experimental Study. 2021;14:7751.

[16] Huang Z, Qin Z, Chu F. A comparative study of finite element modeling techniques for dynamic analysis of elastic-viscoelastic-elastic sandwich structures. Journal of Sandwich Structures & Materials. 2016;18:531-51.