ĐẠI SỐ KHOẢNG VÀ ỨNG DỤNG VÀO PHÂN TÍCH KẾT CẤU THANH THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN KHOẢNG

PGS.TS Trần Văn Liên
Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp
Trường Đại học Xây dựng

Tóm tắt: *Bài báo giới thiệu về đại số khoảng, một lĩnh vực toán học đang phát triển mạnh gần đây, để tính toán các yếu tố không chắc chắn là những đại lượng khoảng bị chặn trên và chặn dưới nhưng không gắn với một cấu trúc xác suất nào. Từ đó, tác giả đã ứng dụng đại số khoảng vào việc phân tích kết cấu thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn khoảng với các tham số vật liệu, hình học và tải trọng là các đại lượng khoảng. Kết quả nhận được xấp xỉ tốt với nghiệm chính xác và có thể ứng dụng vào thực tế.*

Summary: *The paper presents the interval algebra, a developing mathematical field, to calculate uncertainties in the material, geometry, and load parameters in linear static structural analysis using Interval finite element. Uncertainties are introduced as bounded possible values (intervals), and it has lower and upper bounds without assigning a probality structure. The obtained results should be accurate and efficienty computed.*

1. MỞ ĐẦU

Khi mô hình hóa và phân tích kết cấu, ta thường gặp trường hợp các số liệu về vật liệu, hình học, liên kết, tải trọng cũng như chính việc mô hình hóa và phân tích kết cấu có chứa nhiều yếu tố không chắc chắn, dẫn đến các phản ứng của hệ cũng là những yếu tố không chắc chắn. Mặc dù mô hình xác suất và thống kê đã được xây dựng khá đầy đủ và rõ ràng, nhưng trong các trường hợp số liệu không đủ, không rõ ràng, không được phân loại,... thì người ta phải chuyển sang sử dụng các mô hình phi xác suất như lý thuyết tập mờ [1, 2, 15], phương pháp khoảng [5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14], mô hình lồi [6, 13, 14], lý thuyết nhân chứng [2, 6],... là phù hợp hơn để mô hình hóa các yếu tố không chắc chắn.

Nếu chỉ biết vùng của tham số bất định mà không có thông tin nào thêm, thì người ta thường sử dụng hàm phân bố đều trong lý thuyết xác suất, như vậy, sự thiếu hụt thông tin đã được bù đắp bởi ý kiến chủ quan của người phân tích. Ferson và Ginzburg [8] đã chứng minh rằng phương pháp xác suất có thể mang lại những kết quả không chính xác. Khi đó yếu tố không chắc chắn được biểu diễn tốt nhất bằng những thông tin về khoảng giá trị của nó. Theo phương pháp khoảng, đại lượng không chắc chắn *x* được giả thiết là đại lượng khoảng, bị chặn dưới và chặn trên bởi cận dưới $\underline{x}$ và cận trên $\overline{x}$ mà không gán một cấu trúc xác suất nào cả

$$\mathbf{x} = [\underline{x},\ \overline{x}] \tag{1}$$

Mục đích của phương pháp khoảng là đánh giá chính xác khoảng giá trị của phản ứng hệ thống khi biết khoảng giá trị của các tham số đầu vào. Phương pháp khoảng được Moore đưa ra đầu tiên năm 1966, đến những năm 1990, phương pháp khoảng đã được sử dụng để biểu diễn các tham số không chắc chắn trong các hệ kỹ thuật. Phương pháp khoảng mang lại một cách biểu diễn đơn giản, gọn nhẹ và có hiệu quả tính toán cao đối với các yếu tố không chắc chắn khi chỉ có thông tin về vùng giá trị của đại lượng này.

Khi có thêm thông tin về xác suất của các yếu tố không chắc chắn thì phương pháp xác suất sẽ được sử dụng. Tuy vậy, do khối lượng tính toán của phương pháp khoảng là ít hơn so với phương pháp xác suất nên phương pháp này vẫn được sử dụng để đánh giá nhanh chóng vùng giá trị đầu ra của hệ. Phương pháp khoảng có liên quan chặt chẽ với các phương pháp đánh giá các yếu tố không chắc chắn khác như lý thuyết tập mờ, lý thuyết tập ngẫu nhiên, mô hình lồi, mô hình Dempster-Shafer, phương pháp biên xác suất,... Ví dụ, một số mờ là một tập không đếm được của các khoảng tương ứng với mức độ thuộc α, do đó phân tích mờ có thể được biểu diễn như là phân tích khoảng với những mức độ thuộc α khác nhau [1,2,6,11,15].

Bài báo giới thiệu về đại số khoảng, một lĩnh vực toán học đang phát triển mạnh gần đây, để tính toán các yếu tố không chắc chắn là những đại lượng khoảng bị chặn trên và chặn dưới nhưng không gắn với một cấu trúc xác suất nào. Từ đó, tác giả đã ứng dụng đại số khoảng vào việc phân tích kết cấu thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn khoảng với các tham số vật liệu, hình học và tải trọng là các đại lượng khoảng. Kết quả nhận được xấp xỉ tốt với nghiệm chính xác và có thể ứng dụng vào thực tế.

2. ĐẠI SỐ KHOẢNG

2.1 Số khoảng

Một khoảng thực là một tập không rỗng của các số thực

$$x = \left[\underline{x},\ \overline{x}\right] = \left\{x \in R \,\middle|\, \underline{x} \le x \le \overline{x}\right\} \tag{2}$$

với $\underline{x}$ và $\overline{x}$ là cận dưới và cận trên của số khoảng $\boldsymbol{x}$, x là một phần tử bất kỳ trong khoảng $\boldsymbol{x}$, $\mathbf{R}$ là tập các số thực. Nếu $\boldsymbol{x}$ có dạng phức tạp hơn, cận dưới và cận trên được viết dưới dạng

$$\underline{x} \equiv inf(\boldsymbol{x}), \qquad \overline{x} \equiv sup(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

Tập hợp tất cả các số khoảng được ký hiệu $\mathbf{IR}$. Điểm giữa $\check{x}$ và bán kính $rad(x)$ của một khoảng $\boldsymbol{x}$ lần lượt được định nghĩa là:

$$\check{x} = mid(\boldsymbol{x}) = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}\ ;\ rad(\boldsymbol{x}) = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{2} \tag{4}$$

Do đó, số khoảng $\boldsymbol{x}$ có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$\boldsymbol{x} = \left[\check{x} - rad(\boldsymbol{x}),\ \check{x} + rad(\boldsymbol{x})\right] \tag{5}$$

Trong nhiều trường hợp, điểm giữa $\check{x}$ được xem là "*giá trị danh nghĩa*" của khoảng. Khoảng có bán kính bằng *0* được gọi là khoảng *hẹp* hay khoảng suy biến, khoảng hẹp bao gồm chỉ một số thực. Khoảng có bán kính lớn hơn *0* được gọi là khoảng *dày*. Nếu điểm giữa $\check{x} \neq 0$ thì $\boldsymbol{x}$ có thể phân tích thành hai phần: phần xác định (điểm giữa) $\check{x}$ và phần khoảng $1+\delta$

$$\boldsymbol{x} = \check{x}(1+\boldsymbol{\delta}) \tag{6}$$

trong đó:

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\boldsymbol{x}}{\check{x}} - 1 = \begin{cases} [-rad(\boldsymbol{x})/\check{x},\ rad(\boldsymbol{x})/\check{x}] & khi\ \check{x} > 0 \\ [rad(\boldsymbol{x})/\check{x},\ -rad(\boldsymbol{x})/\check{x}]\ , & khi\ \check{x} < 0 \end{cases} \tag{7}$$

$\boldsymbol{\delta}$ được gọi là *nhân tử khoảng*, là số đo sự biến thiên của $\boldsymbol{x}$ đối với điểm giữa $\check{x}$ của nó. Một khoảng $\boldsymbol{x}$ có *2%* không chắc chắn (đối với điểm giữa) nghĩa là $\delta = [-0.01,\ 0.01]$ và $\boldsymbol{x} = \check{x}(1+[-0.01,\ 0.01])$. *Độ rộng* của khoảng $\boldsymbol{x}$ được định nghĩa là

$$wid(\boldsymbol{x}) = 2rad(\boldsymbol{x}) = \overline{x} - \underline{x} \tag{8}$$

Phần trong của khoảng $\boldsymbol{x}$ được định nghĩa là:

$$int(\boldsymbol{x}) = \{x \in R \mid \overline{x} < x < \underline{x}\} \tag{9}$$

Giá trị tuyệt đối hay *magnhitude* của khoảng được định nghĩa là:

$$|\boldsymbol{x}| = mag(\boldsymbol{x}) = max\{\ |\underline{x}|,\ |\overline{x}|\} \tag{10}$$

Khoảng $\boldsymbol{x}$ là khoảng con của khoảng $\boldsymbol{y}$, ký hiệu là $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}$, khi và chỉ khi $\underline{y} \le \underline{x}$ và $\overline{y} \ge \overline{x}$. Bất đẳng thức $\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$ có nghĩa là $\overline{x} < \underline{y}$. Nếu *S* là một tập con không rỗng và giới nội của **R**, thì *bao* (*hull*) của *S* là khoảng hẹp nhất chứa *S*, được ký hiệu là

$$\Diamond S := [inf(S),\ sup(S)] \tag{11}$$

2.2 Các phép tính số học khoảng

Bốn phép toán cơ bản của số thực là *(+,-,×,÷)* có thể mở rộng cho các số khoảng. Một phép toán bất kỳ $\circ \in (+,\ -,\ \times,\ \div)$ trên các khoảng được định nghĩa theo quy tắc chung như sau

$$\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \{x \circ y\ \mid x \in \boldsymbol{x},\ y \in \boldsymbol{y}\} \tag{12}$$

Tập hợp các kết quả của phép toán đối với $x \in \boldsymbol{x}$ và $y \in \boldsymbol{y}$ tạo thành một khoảng đóng (nếu mẫu số không chứa số 0) với các cận của khoảng xác định như sau

$$\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = [min(x \circ y),\ max(x \circ y)]\ \ với\ \ \circ \in (+,\ -,\ \wedge,\ \div) \tag{13}$$

Cận dưới và cận trên của phép toán $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y}$ được xác định từ bốn cặp số $\underline{x} \circ \underline{y},\ \underline{x} \circ \overline{y},\ \overline{x} \circ \underline{y},\ \overline{x} \circ \overline{y}$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = [\ \underline{x}+\underline{y},\ \overline{x}+\overline{y}] \\ &\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = [\ \underline{x}-\overline{y},\ \overline{x}-\underline{y}] \\ &\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = [\ min\{\underline{xy}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{xy}\}, max\{\underline{xy}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{xy}\}] \\ &1/x = [1/\overline{x}, 1/\underline{x}]\ \ nếu\ \underline{x} > 0\ hay\ \overline{x} < 0 \\ &x \div y = x \times 1/y \end{aligned} \tag{14}$$

2.3 Hàm số khoảng

Hàm số khoảng là một hàm có giá trị khoảng của một hoặc nhiều biến khoảng, do đó, hàm số khoảng ánh xạ giá trị của một hoặc nhiều biến khoảng lên một khoảng.

Đối với hàm số $f(x_1, ...,x_n)$, nếu hàm giá trị khoảng $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, ...,\boldsymbol{x}_n)$ có tính chất

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, ...,\boldsymbol{x}_n) = f(x_1, ...,x_n) \text{ với mọi đối số x}$$

thì ***f*** được gọi là *hàm mở rộng khoảng* của *f*. Ta có thể nhận được hàm mở rộng khoảng tự nhiên của *f* bằng cách thay thế mỗi biến thực x_i bằng một biến khoảng $\boldsymbol{x}_i$ và mỗi phép toán thực $(+, -, \times, \div)$ bằng các phép toán số học khoảng tương ứng.

Nếu hàm số $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, ...,\boldsymbol{x}_n)$ là một biểu thức của các biến khoảng $(\boldsymbol{x}_1, ...,\boldsymbol{x}_n)$ và các phép tính khoảng $(+, -, \times, \div)$ thì hàm này thoả mãn tính chất bao hàm cơ bản là [7,10]

$$\text{Nếu } \boldsymbol{x}_1 \subseteq \boldsymbol{y}_1, \quad ..,\boldsymbol{x}_n \subseteq \boldsymbol{y}_n \text{ thì } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, ...,\boldsymbol{x}_n) \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1, ...,\boldsymbol{y}_n)$$

Một đặc điểm đáng chú ý của bao hàm là vùng giá trị của một hàm số có thể được đánh giá chặt bởi hàm mở rộng khoảng của chính nó

$$\{f(x_1, ...,x_n) | x_1 \in \boldsymbol{x}_1, ...,x_n \in \boldsymbol{x}_n\} \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, ...,\boldsymbol{x}_n) \qquad (15)$$

Điều đó có nghĩa là hàm số $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, ...,\boldsymbol{x}_n)$ chứa khoảng giá trị của $f(x_1, ...,x_n)$ đối với mọi $x_i \in \boldsymbol{x}_i \ (i = 1,2,n)$. Ví dụ, đối với hàm số $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ với $\boldsymbol{x}_1 \in [1, 2]$, $\boldsymbol{x}_2 \in [2, 3]$ ta tìm được khoảng giá trị của ***f*** bằng cách đánh giá hàm mở rộng khoảng tự nhiên của chính nó

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = [1, 2] + [2, 3] = [3, 5]$$

2.4 Đặc điểm bài toán phụ thuộc

Theo (15), đánh giá khoảng giá trị hàm ***f(x)*** thường không đưa ra được vùng giá trị chính xác của *f* mà chỉ đánh giá được bao kín biên ngoài của khoảng. Trong nhiều trường hợp, những biên được xác định bởi số học khoảng có xu hướng quá rộng so với biên khoảng giá trị thực, do đó, kết quả nhận được là không chính xác. Ví dụ, bằng cách đánh giá hàm mở rộng khoảng tự nhiên của hàm số $f(x) = x^2 - x$ với $x \in [-1, 1]$, ta nhận được vùng giá trị của *f* là

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} = [-1, 1]^2 - [-1, 1] = [0, 1] - [-1, 1] = [-1, 2]$$

Mặt khác, ta có thể biểu diễn:

$$\{f(x) = x^2 - x = (x - 0.5)^2 - 0.25 | x \in [-1, 1]\} = [-0.25, 2]$$

Như vậy, vùng giá trị hàm khoảng *f* có bao hàm vùng giá trị chính xác, nhưng nó đưa ra giá trị cận dưới là quá lớn từ - 0.25 tới -1. Trong tính toán số học khoảng, mỗi lần xuất hiện của một biến khoảng nào đó thì nó lại được xem như là một biến khoảng khác nhau, độc lập nhau. Sau khi biểu thức con $\boldsymbol{x}^2$ được tính, số học khoảng không nhận ra rằng giá trị của biến khoảng $\boldsymbol{x}^2$ là liên quan chặt chẽ tới giá trị của biến khoảng $\boldsymbol{x}$. Số học khoảng xem các khoảng là độc lập nhau, nghĩa là, số học khoảng tính biểu thức $\boldsymbol{x}^2$-$\boldsymbol{x}$ như là $\boldsymbol{x}^2_1$-$\boldsymbol{x}_2$ với $\boldsymbol{x}_1 = [-1, 1]$, $\boldsymbol{x}_2 = [-1, 1]$.

Sự mở rộng khoảng không mong muốn này được gọi là sự ước tính quá mức do bài toán phụ thuộc hay đơn giản là *bài toán phụ thuộc*. Nói chung, *nếu tham số khoảng xuất hiện nhiều hơn một lần trong tính toán thì sẽ xảy ra bài toán phụ thuộc*. Đối với các biểu thức mà các tham số khoảng xuất hiện chỉ một lần, thì sẽ không xảy ra bài toán phụ thuộc và ta có thể nhận được vùng giá trị chính xác của hàm số. Nếu bằng cách nào đó, ta có thể giảm được số lần xuất hiện mỗi tham số khoảng thì ta có thể tránh được bài toán phụ thuộc.

Do bài toán phụ thuộc, chỉ còn một số luật đại số của số thực vẫn còn đúng cho đại số khoảng, các luật khác chỉ giữ trong một dạng yếu hơn. Có hai quy tắc chung cho các phép toán khoảng [7,10] là:

1 Hai biểu thức đại số tương đương trong đại số thực thì cũng tương đương trong đại số khoảng khi mà tất cả các biến xuất hiện chỉ một lần. Ví dụ, nếu $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathrm{IR}$ thì

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba};\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\pm\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{c});\ (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) \tag{16}$$

2. Nếu f *và* g là hai biểu thức đại số tương đương trong đại số thực thì hàm mở rộng khoảng có dạng $\boldsymbol{f} \subseteq \boldsymbol{g}$ nếu các biến xuất hiện chỉ một lần trong f. Ví dụ, nếu $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathrm{IR}$ thì

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{c}) \subseteq \boldsymbol{ab}\pm\boldsymbol{ac},\ (\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \subseteq \boldsymbol{ac}\pm\boldsymbol{bc} \qquad \text{(luật phân bố phụ)}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \subseteq (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),\ \boldsymbol{a}/\boldsymbol{b} \subseteq (\boldsymbol{ac})/(\boldsymbol{bc}) \qquad \text{(luật giản ước phụ)} \tag{17}$$

$$0 \in \boldsymbol{a}-\boldsymbol{a},\ 1 \in \boldsymbol{a}/\boldsymbol{a} \qquad \text{(luật giản ước phụ)}$$

Bài toán phụ thuộc làm cho luật phân bố, luật giản ước của đại số không còn phù hợp và gây rất nhiều khó khăn để có được kết quả chính xác đối với các tính toán khoảng phức tạp. *Thành công của phép phân tích khoảng phụ thuộc đáng kể vào việc sự giảm bớt sự phụ thuộc.*

2.5 Véc tơ khoảng, ma trận khoảng

Một ma trận khoảng $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{m\times n}$ là một ma trận mà các phần tử của nó là các khoảng $\mathbf{A}_{jk}=\left[\underline{\mathbf{A}}_{jk}, \overline{\mathbf{A}}_{jk}\right]$ với $j - 1,\ldots, m;\ k = 1,\ldots,n;$ $\mathrm{IR}^{m\times n}$ biểu thị tập của tất cả những ma trận khoảng $m\times n;$ $\mathrm{R}^{m\times n}$ biểu thị tập của tất cả những ma trận số thực $m\times n$. Cận dưới, cận trên, điểm giữa, phần trong, giá trị tuyệt đối của một ma trận khoảng được định nghĩa lần lượt là

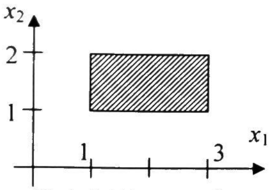
$$\underline{A}=\left(\underline{A}_{jk}\right)\ ;\ \overline{A}=\left(\overline{A}_{jk}\right)\ ;\ \breve{A}=\left(\breve{A}_{jk}\right);\ int(\boldsymbol{A})=\left(int(\boldsymbol{A}_{jk})\right)\ ;\ |\boldsymbol{A}|=\left(|\boldsymbol{A}_{jk}|\right) \tag{18}$$

Ma trận khoảng kích thước *n×1* gọi là một véc tơ khoảng, biểu thị bằng IR^n Hình 1 biểu diễn một véc tơ khoảng có hai thành phần $\boldsymbol{x}=\left(\ [1,\ 3],[\ 1,\ 2]\ \right)^T$

Các phép toán trên ma trận khoảng được mở rộng từ các phép toán trên ma trận số thực tương ứng. Ví dụ, nếu $\boldsymbol{A} \in \mathrm{IR}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathrm{IR}^{m\times n}$ và $x \in \mathrm{IR}^n$ thì:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{B}_{ij}\right)_{1\le i\le n,1\le j\le n},\ \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ik}\times\boldsymbol{B}_{kg}\right)_{1\le i\le n,1\le j\le n} \quad \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{x}=\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ij}\times\boldsymbol{x}_{j}\right)_{1\le i\le n} \tag{19}$$

Do bản chất của số học khoảng, một vài luật đại số đúng cho các phép toán ma trận số thì chỉ đúng ở dạng yếu hơn cho các phép toán ma trận khoảng. Ví dụ, đối với các ma trận:



Hình 1. Véc tơ khoảng
$x = ([1,3],[1,2])^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} [-1,1] & 0 \\ 0 & [-1,1] \end{pmatrix}$$

thì

$$(AB)\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [-1,1] & 0 \\ 0 & [-1,1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [-1,1] \\ [-1,1] & [-1,1] \end{pmatrix}$$

và

$$A(B\boldsymbol{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [-1,1] & 0 \\ [-1,1] & [-1,1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2,2] & [-1,1] \\ [-1,1] & [-1,1] \end{pmatrix}$$

Có thể thấy $(AB)\boldsymbol{C} \neq A(B\boldsymbol{C})$, tức là luật liên kết không còn đúng, ta có $(AB)\boldsymbol{C} \subseteq A(B\boldsymbol{C})$. Các luật đại số dạng yếu hơn được Neumaier đưa ra [7,10]

$$(AB)\boldsymbol{C} \subseteq A(B\boldsymbol{C}) \text{ cho } A \in R^{m\times n},\ B \in R^{n\times p},\ \boldsymbol{C} \in IR^{p\times q}$$

$$(A\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \subseteq A(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) \text{ cho } A \in R^{mxn},\ \boldsymbol{B} \in IR^{nxp},\ \boldsymbol{C} \in IR^{pxq}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})C \subseteq \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}C) \text{ cho } \boldsymbol{A} \in IR^{mxn},\ \boldsymbol{B} \in IR^{nxp},\ C \in R^{pxq} \tag{20}$$

$$A(\boldsymbol{B}C) \subseteq (A\boldsymbol{B})C \text{ cho } A \in R^{mxn},\ \boldsymbol{B} \in IR^{nxp},\ C \in R^{pxq}$$

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B}) \subseteq \alpha(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \text{ cho } \alpha \in R,\ \boldsymbol{A} \in IR^{nxp},\ \boldsymbol{B} \in IR^{pxq}$$

Nói chung, khi tính toán liên quan tới số thực và số khoảng, kết quả sẽ chính xác hơn nếu thực hiện phép toán khoảng càng muộn càng tốt.

2.6 Hệ phương trình tuyến tính khoảng

Hệ phương trình tuyến tính khoảng với ma trận hệ số khoảng $\boldsymbol{A} \in IR^{n\times n}$ và véc tơ khoảng $\boldsymbol{b} \in IR^n$ có dạng:

$$Ax = b \quad (A \in \boldsymbol{A},\ b \in \boldsymbol{b}) \tag{21}$$

Tập nghiệm của phương trình (21) có dạng:+

$$\sum(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}) = \{x \in R^n \,|\, \exists A \in \boldsymbol{A},\ \exists b \in \boldsymbol{b} : Ax = b\} \tag{22}$$

Để đảm bảo tập nghiệm $\sum(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$ bị giới nội thì ma trận $\boldsymbol{A}$ phải chính tắc, tức là mọi ma trận $A \in \boldsymbol{A}$ là không kỳ dị. Nói chung, tập nghiệm $\sum(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$ có hình dạng phức tạp và khó để tính toán [7,10]. Nếu $\boldsymbol{A} \in IR^{n\times n}$ là một ma trận khoảng vuông chính tắc thì tập nghiệm bị giới nội.

Bao của tập nghiệm là véctơ khoảng hẹp nhất chứa $\sum(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{b} = \Diamond\sum(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}) \tag{23}$$

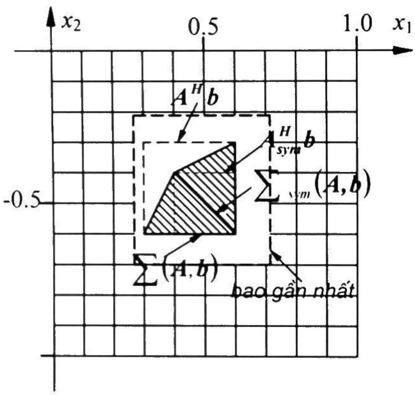
Tương ứng với mỗi $A \in \boldsymbol{A}$, $b \in \boldsymbol{b}$, phương trình $Ax = b$ có một nghiệm duy nhất $x = A^{-1}b$, như vậy, bao của tập nghiệm $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{b}$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$A^H b = \Diamond\left\{ A^{-1} b \,\middle|\, A \in \boldsymbol{A},\ b \in \boldsymbol{b} \right\} \tag{24}$$

Tuy nhiên, việc tính toán bao của tập nghiệm cho trường hợp tổng quát là bài toán khá phức tạp. Trong thực tế, nghiệm cần tìm luôn mở rộng hơn bao của tập nghiệm, nên ta sẽ tìm nghiệm là véc tơ khoảng $\boldsymbol{x}$ bao hàm $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{b}$ mà vẫn đảm bảo độ chính xác cần thiết

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{x} \tag{25}$$

$\boldsymbol{x}$ được coi là *bao gần nhất* của tập nghiệm, tất nhiên, $\boldsymbol{x}$ cũng không phải là duy nhất. Dưới đây, "*nghiệm của phương trình khoảng*" được hiểu là "*bao gần nhất của tập nghiệm*", còn "*nghiệm chính xác*" được hiểu là "*bao của tập nghiệm*".



Hình 2. *Tập nghiệm, bao của tập nghiệm và bao gần nhất của tập nghiệm*

Khái niệm về tập nghiệm, bao của tập nghiệm và bao gần nhất của tập nghiệm được minh hoạ trong ví dụ sau đây

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & [-1,\ 0] \\ [-1,\ 0] & 2 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -1.2 \end{pmatrix}$$

Khi đó A có thể biểu diễn dưới dạng:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha \\ -\beta & 2 \end{pmatrix}$$

với $\alpha, \beta \in [0,\ 1]$. Nghiệm giải tích của $Ax=b$ theo quy tắc Cramer là

$$x = \begin{pmatrix} 1.2(2-\alpha)/(4-\alpha\beta) \\ -1.2(\beta-2)/(4-\alpha\beta) \end{pmatrix}$$

Trên hình 2, tập nghiệm là tứ giác với bốn đỉnh là (0.3,-0.6), (0.6, - 0.6), (0.6, - 0.3), (0.4, - 0.4). Từ đó, ta xác định được bao của tập nghiệm là:

$$\boldsymbol{A}^H b = \begin{pmatrix} [0.3,\ 0.6] \\ [-0.6,\ -0.3] \end{pmatrix}$$

Sử dụng phần mềm số học khoảng *b4m* trong MatLab [9], bao gần nhất của tập nghiệm là:

$$x = \begin{pmatrix} [0.2398,\ \ 0.7202] \\ [-0.7202\ \ -0.2398] \end{pmatrix}$$

Rõ ràng, bao gần nhất của tập nghiệm $\boldsymbol{x}$ là rộng hơn bao của tập nghiệm $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{b}$.

Các hệ số khoảng trong ma trận A của ví dụ trên là hoàn toàn không phụ thuộc lẫn nhau, nghĩa là, các hệ số α, β được xem là biến thiên độc lập giữa các biên của chúng. Loại phương trình tuyến tính khoảng như vậy gọi là *hệ phương trình tuyến tính khoảng phi tham số*. Trong nhiều bài toán, giữa các hệ số của ma trận khoảng luôn có sự phụ thuộc nào đó, khi đó hệ phương trình tuyến tính khoảng gọi là *hệ phương trình khoảng tuyến tính tham số*. Ví dụ, nếu ma trận khoảng A là ma trận đối xứng

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha \\ -\alpha & 2 \end{pmatrix}$$

với $\alpha \in [0, 1]$ thì tập nghiệm trong trường hợp này là:

$$\sum\nolimits_{sym}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{x \in \mathrm{R}^n \mid \exists A \in \boldsymbol{A}, \exists b \in \boldsymbol{b} : Ax = b \text{ với } A^t = A\}$$

Nghiệm giải tích của $A_{sym}x = b$ là:

$$x = \begin{pmatrix} 1.2(2-\alpha)/(4-\alpha^2) \\ 1.2(\alpha-2)/(4-\alpha^2) \end{pmatrix}$$

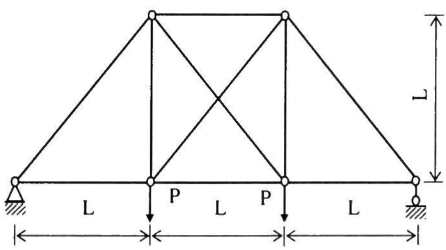
Với nghiệm giải tích ở trên, tập nghiệm $\sum_{sym}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ là một đường thẳng đậm như trên hình 2 và bao của tập nghiệm là:

$$\boldsymbol{A}_{sym}^{H} b = \begin{pmatrix} [0.4, 0.6] \\ [-0.6, -0.4] \end{pmatrix}$$

Rõ ràng:

$$\boldsymbol{A}_{sym}^{H} b \subseteq \boldsymbol{A}^{H} b$$

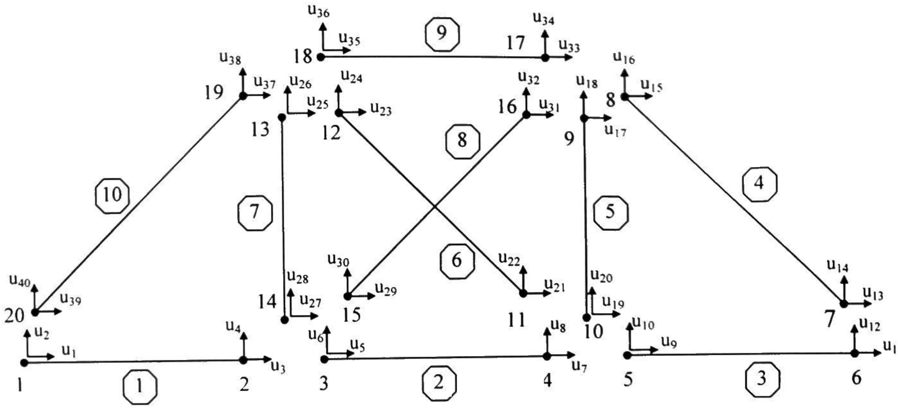
nghĩa là *bao của trường hợp đối xứng là hẹp hơn so với bao của các trường hợp chung* trước đó. Ví dụ này minh hoạ cho sự quan trọng của việc tính toán sự phụ thuộc để tìm ra một bao chính xác của các phương trình tuyến tính khoảng với các hệ số phụ thuộc.



Hình 3. *Sơ đồ dàn phẳng*

3. VÍ DỤ

Xác định các chuyển vị nút theo phương pháp PTHH khoảng và so sánh với nghiệm giải tích đối với dàn phẳng siêu tĩnh (*hình* 3) gồm 10 thanh có diện tích A, mô đun đàn hồi E và chịu tải trọng P. Các số liệu về vật liệu, hình học, tải trọng đều là các đại lượng khoảng: E = [195, 205].10^6(kN/m^2), A = [9.75, 10.25].10^{-4}(m^2), P = [133, 147](kN), L = 4.5(m).



Hình 4. *Sơ đồ rời rạc hóa theo phương pháp PTHH khoảng*

Sơ đồ rời rạc hóa theo phương pháp PTHH khoảng [4] được thể hiện trên hình 4 gồm 10 thanh với 40 chuyển vị nút $u = (u_1, u_2, \cdots, u_{40})$. Các điều kiện biên và ràng buộc về chuyển vị giữa các nút được xử lý bằng phương pháp hàm phạt. Hệ 40 phương trình tuyến tính khoảng được giải theo phép lặp Krawczyk [7] là một phép lặp cho kết quả nhanh và tin cậy hơn các phép khử khoảng Gauss hay lặp khoảng Gauss-Seidel. Bảng 1 thể hiện việc so sánh kết quả tính chuyển vị theo phương pháp PTHH khoảng với chuyển vị theo nghiệm giải tích.

Bảng 1. *Kết quả tính chuyển vị nút*

Chuyển vị nút	*Nghiệm giải tích (m)*	*Nghiệm theo chương trình (m)*	*Chuyển vị nút*	*Nghiệm giải tích (m)*	*Nghiệm theo chương trình (m)*
1	[0, 0]	[0.0000, 0.0001]	21	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]
2	[0, 0]	[-0.0001, 0.0001]	22	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]
3	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]	23	[0.0061, 0.0065]	[0.0056, 0.0070]
4	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	24	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]
5	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]	25	[0.0061, 0.0065]	[0.0056, 0.0070]
6	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	26	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]
7	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]	27	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]
8	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	28	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]
9	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]	29	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]
10	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	30	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]
11	[0.0086, 0.009]	[0.0079, 0.0097]	31	[0.0024, 0.0026]	[0.0021, 0.0029]
12	[0, 0]	[-0.0001, 0.0001]	32	[-0.016, -0.0144]	[-0.0165, -0.0140]
13	[0.0086, 0.009]	[0.0079, 0.0097]	33	[0.0024, 0.0026]	[0.0021, 0.0029]
14	[0, 0]	[-0.0001, -0.0000]	34	[-0.016, -0.0144]	[-0.0165, -0.0140]
15	[0.0024, 0.0026]	[0.0021, 0.0029]	35	[0.006, 0.0066]	[0.0056, 0.0070]
16	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]	36	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]
17	[0.0024, 0.0026]	[0.0021, 0.0029]	37	[0.0061, 0.0065]	[0.0056, 0.0070]
18	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]	38	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]
19	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]	39	[0, 0]	[-0.0001, -0.0000]
20	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	40	[0, 0]	[-0.0001, -0.0000]

Ta nhận thấy, nghiệm giải tích luôn đưa ra kết quả là một khoảng hẹp nhất so với các kết quả tính theo chương trình. Kết quả nhận được xấp xỉ tốt với nghiệm chính xác cho thấy cách giải đã khắc phục được đặc điểm bài toán phụ thuộc của đại số khoảng, do đó, có thể ứng dụng vào phân tích các kết cấu phức tạp hơn với các số liệu về vật liệu, hình học và tải trọng là các đại lượng khoảng.

4. KẾT LUẬN

- Nếu các số liệu về vật liệu, hình học, liên kết, tải trọng cũng như chính việc mô hình hóa và phân tích kết cấu có chứa nhiều yếu tố không chắc chắn thì ta phải sử dụng mô hình các yếu tố không chắc chắn phi xác suất như lý thuyết tập mờ, phương pháp khoảng, lý thuyết tập ngẫu nhiên, mô hình lồi,... Phương pháp khoảng mang lại một cách biểu diễn đơn giản, gọn nhẹ và có hiệu quả tính toán cao đối với các yếu tố không chắc chắn khi chỉ có thông tin về vùng giá trị của đại lượng này mà không gán một cấu trúc xác suất nào cả.

- Khi tính toán khoảng, cần phải chú ý đến đặc điểm bài toán phụ thuộc là nguyên nhân cơ bản để dẫn tới kết quả không chính xác, từ đó, phải có cách xử lý thích hợp. Đồng thời chỉ thực hiện phép tính số học khoảng khi thật cần thiết, càng muộn càng tốt.

- Đã ứng dụng đại số khoảng để tính toán kết cấu hệ thanh với các tham số vật liệu, hình học, tải trọng là đại lượng khoảng. Chương trình tính kết cấu được lập trong môi trường MatLab theo phương pháp PTHH khoảng, sử dụng phép giải lặp Krawczyk để giải hệ phương trình tuyến tính khoảng. Các kết quả nhận được xấp xỉ tốt với nghiệm chính xác và có thể ứng dụng vào thực tế.

Tài liệu tham khảo

1 Phan Xuân Minh, Nguyễn Doãn Phước (2002), *Lý thuyết điều khiển mờ và ứng dụng*, NXB KHKT, Hà nội.

2. Nguyễn Như Phong (2005), "*Lý thuyết mờ và ứng dụng*", NXB KHKT.

3. Nguyễn Hoài Sơn, Vũ Như Phan Thiện, Đỗ Thanh Việt (2001), "*Phương pháp phần tử hữu hạn với Matlab*", NXB Đại học quốc gia, TP HCM.

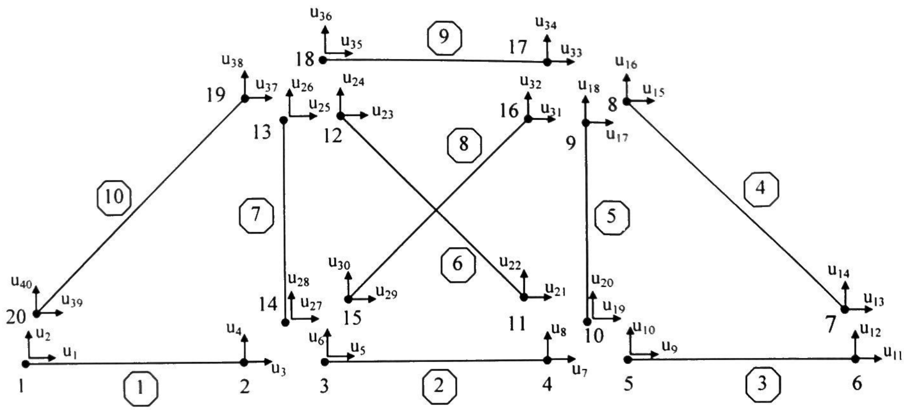
4. Trần Văn Liên (2008), "*Phân tích kết cấu thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn khoảng*". Tạp chí khoa học xây dựng, số 4, Trường Đại học Xây dựng.

5. Andrew Bernat, Vladik Kreinovich, Thomas J McLean and Gennady N Solopchenko (1995), "*What are interval computations and how are they related to quality in manufacturing*".

6. Scott Ferson, Roger B. Nelsen, Janos Hajagos,... (2004), "*Dependence in probabilistic modeling, Dempster-Shafer theory, and probability bounds analysis*".

7. Gareth I Hargreaves (2002), "*Interval analysis in Matlab*", A dissertation submitted to the University of Manchester for the degree of Master of science, Dec.

8. Hao Zhang (2005), "*Nondeterministic linear static finite element analysis: An Interval Approach*", School of Civil and Environmental Engineering Georgia Institute of Techonology, Dec.



Hình 4. *Sơ đồ rời rạc hóa theo phương pháp PTHH khoảng*

Sơ đồ rời rạc hóa theo phương pháp PTHH khoảng [4] được thể hiện trên hình 4 gồm 10 thanh với 40 chuyển vị nút $u = (u_1, u_2, \cdots, u_{40})$. Các điều kiện biên và ràng buộc về chuyển vị giữa các nút được xử lý bằng phương pháp hàm phạt. Hệ 40 phương trình tuyến tính khoảng được giải theo phép lặp Krawczyk [7] là một phép lặp cho kết quả nhanh và tin cậy hơn các phép khử khoảng Gauss hay lặp khoảng Gauss-Seidel. Bảng 1 thể hiện việc so sánh kết quả tính chuyển vị theo phương pháp PTHH khoảng với chuyển vị theo nghiệm giải tích.

Bảng 1. *Kết quả tính chuyển vị nút*

Chuyển vị nút	*Nghiệm giải tích (m)*	*Nghiệm theo chương trình (m)*	*Chuyển vị nút*	*Nghiệm giải tích (m)*	*Nghiệm theo chương trình (m)*
1	[0, 0]	[0.0000, 0.0001]	21	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]
2	[0, 0]	[-0.0001, 0.0001]	22	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]
3	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]	23	[0.0061, 0.0065]	[0.0056, 0.0070]
4	[-0 0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	24	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]
5	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]	25	[0.0061, 0.0065]	[0.0056, 0.0070]
6	[-0 0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	26	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]
7	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]	27	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]
8	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	28	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]
9	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]	29	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]
10	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	30	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]
11	[0.0086, 0.009]	[0.0079, 0.0097]	31	[0.0024, 0.0026]	[0.0021, 0.0029]
12	[0, 0]	[-0.0001, 0.0001]	32	[-0.016, -0.0144]	[-0.0165, -0.0140]
13	[0.0086, 0.009]	[0.0079, 0.0097]	33	[0.0024, 0.0026]	[0.0021, 0.0029]
14	[0, 0]	[-0.0001, -0.0000]	34	[-0.016, -0.0144]	[-0.0165, -0.0140]
15	[0 0024, 0 0026]	[0.0021, 0.0029]	35	[0.006, 0.0066]	[0.0056, 0.0070]
16	[-0 0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]	36	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]
17	[0.0024, 0 0026]	[0.0021, 0.0029]	37	[0.0061, 0.0065]	[0.0056, 0.0070]
18	[-0 0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]	38	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]
19	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]	39	[0, 0]	[-0.0001, -0.0000]
20	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	40	[0, 0]	[-0.0001, -0.0000]