Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc
Kỷ niệm 30 năm Viện Cơ học và 30 năm Tạp chí Cơ học
Hà Nội, ngày 8-9 /4/2009

Một số kết quả phân tích kết cấu hệ thanh có các yếu tố không chắc chắn

Trần Văn Liên

Trường Đại học Xây dựng, LienTV@hotmail.com

Tóm tắt: Bài báo trình bày việc sử dụng phương pháp PTHH khoảng để mô tả các yếu tố không chắc chắn của kết cấu là những đại lượng khoảng bị chặn trên và chặn dưới nhưng không gắn với một cấu trúc xác suất nào. Từ đó, tác giả đã ứng dụng vào việc phân tích kết cấu thanh với các tham số vật liệu, hình học và tải trọng là các tham số khoảng. Các kết quả nhận được xấp xỉ tốt với nghiệm chính xác và có thể ứng dụng vào thực tế.

1. Mở đầu

Khi mô hình hóa và phân tích kết cấu, ta thường gặp trường hợp các số liệu về vật liệu, hình học, liên kết, tải trọng cũng như chính việc mô hình hóa và phân tích kết cấu có chứa nhiều yếu tố không chắc chắn, dẫn đến các phản ứng của hệ cũng là những yếu tố không chắc chắn. Mặc dù *mô hình xác suất và thống kê* đã được xây dựng khá đầy đủ và rõ ràng, nhưng trong các trường hợp số liệu không đủ, không rõ ràng, không được phân loại,... thì người ta phải chuyển sang sử dụng các *mô hình phi xác suất* như lý thuyết tập mờ [1,2,13], phương pháp khoảng [3,5,6,7,8,10,11,12], mô hình lồi [4,11,12], lý thuyết nhân chứng [2,4],... là phù hợp hơn để mô hình hóa các yếu tố không chắc chắn.

Nếu chỉ biết vùng của tham số bất định mà không có thông tin nào thêm, thì người ta thường sử dụng hàm phân bố đều trong lý thuyết xác suất, như vậy, sự thiếu hụt thông tin đã được bù đắp bởi ý kiến chủ quan của người phân tích. Ferson và Ginzburg [6] đã chứng minh rằng *phương pháp xác suất có thể mang lại những kết quả không chính xác*. Trong những trường hợp này, yếu tố không chắc chắn được biểu diễn tốt nhất bằng những thông tin về khoảng giá trị của nó.

Theo phương pháp khoảng, đại lượng không chắc chắn x được giả thiết là đại lượng khoảng $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$, bị chặn dưới và chặn trên bởi cận dưới $\underline{x}$ và cận trên $\overline{x}$ mà không gán một cấu trúc xác suất nào cả. Mục đích của phương pháp khoảng là đánh giá chính xác khoảng giá trị của phản ứng hệ thống khi biết khoảng giá trị của các tham số đầu vào. Phương pháp khoảng được Moore đưa ra đầu tiên năm 1966, đến những năm 1990, phương pháp này đã được sử dụng để biểu diễn các tham số không chắc chắn trong các hệ kỹ thuật. Phương pháp khoảng mang lại một cách biểu diễn đơn giản, gọn nhẹ và có hiệu quả tính toán cao đối với các yếu tố không chắc chắn khi chỉ có thông tin về vùng giá trị của đại lượng này.

Khi có thêm thông tin về xác suất của các yếu tố không chắc chắn thì phương pháp xác suất sẽ được sử dụng. Tuy vậy, do khối lượng tính toán của phương pháp khoảng là ít hơn so với phương pháp xác suất nên phương pháp này vẫn được sử dụng để đánh giá nhanh chóng vùng giá trị đầu ra của hệ. Phương pháp khoảng có liên quan chặt chẽ với các phương pháp đánh giá các yếu tố không chắc chắn khác như lý thuyết tập mờ, lý thuyết tập ngẫu nhiên, mô hình lồi, mô hình Dempster-Shafer, phương pháp biên xác suất,... Ví dụ, một số mờ có thể được tạo nên từ một tập của những khoảng tương ứng với mức độ thuộc α, khi đó phân tích tập mờ có thể được biểu diễn như là phân tích khoảng với những mức độ thuộc α khác nhau [1,2,4,9,13].

Trong lĩnh vực phân tích kết cấu, những năm gần đây đã có nhiều nghiên cứu quan tâm tới việc mô hình hoá và phân tích kết cấu có xét đến các yếu tố không chắc chắn bao gồm việc phát triển phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) khoảng và phương pháp PTHH mờ [6,11,12]. Việc phân tích PTHH mờ có thể chia ra thành một loạt các phân tích PTHH khoảng với các mức mờ khác nhau. Vì vậy, phương pháp PTHH mờ cũng là sự mở rộng của phương pháp PTHH khoảng.

Giữa những năm 1990 là thời kì bắt đầu nghiên cứu phương pháp PTHH khoảng trong cơ học và đã có một số kết quả nhất định trong lĩnh vực phân tích kết cấu tĩnh và động, địa kĩ thuật, truyền nhiệt,...[6,11,12]. Phương pháp PTHH khoảng có thể xem như là phần mở rộng của phương pháp PTHH thông thường. Sự khác nhau cơ bản là, trong phương pháp PTHH khoảng một số tham số như môđun đàn hồi, diện tích tiết diện, tải trọng,... là các đại lượng khoảng, dẫn đến ma trận độ cứng K và véc tơ tải trọng p cũng là những đại lượng khoảng, do đó, phản ứng của hệ bao gồm ứng suất, biến dạng, chuyển vị, ... cũng là hàm của các đại lượng khoảng. Bài toán đặt ra cần phải đánh giá chính xác khoảng của phản ứng của hệ.

Nếu chỉ có tải trọng là tham số khoảng, ta có thể tìm được chính xác vùng phản ứng của hệ vì ma trận độ cứng K không bao gồm các số khoảng. Mullen và Muhanna [11,12] đã phát triển một thuật toán dựa trên số học khoảng để tính phản ứng của kết cấu khi chịu những dạng tải trọng bất lợi nhất. Từ nghiên cứu của Mullen và Muhanna, Saxena [6,11] đã nghiên cứu tất cả những dạng tải trọng cho những kết cấu lớn và phức tạp. Pantelides và Ganzerli [6,11] đã sử dụng phương pháp chồng chất nghiệm để giải những bài toán đàn hồi tuyến tính với tải trọng khoảng và nghiệm thu được trùng với nghiệm của Mullen và Muhanna. Đối với các bài toán với nhiều tải trọng khoảng, phương pháp chồng chất nghiệm lại trở nên kém hiệu quả. Đối với các kết cấu dàn, dầm tĩnh định có độ cứng khoảng, khi đó, nội lực là không phụ thuộc vào ma trận độ cứng, đồng thời có thể nhận được đánh giá chính xác của chuyển vị khoảng bằng phương pháp hàm phạt hay phương pháp nhân tử Lagrange. Đối với trường hợp tổng quát, khi cả ma trận độ cứng K và véc tơ tải trọng p là các đại lượng khoảng, thì độ chính xác của khoảng phản ứng của hệ là khó đạt được hơn. Do đó, ta cần quan tâm đến việc là làm sao đánh giá được khoảng chính xác cho phản ứng thực của hệ.

Bài báo này trình bày việc sử dụng phương pháp PTHH khoảng để mô tả các yếu tố không chắc chắn là những đại lượng khoảng bị chặn trên và chặn dưới nhưng không gắn với một cấu trúc xác suất nào. Từ đó, tác giả đã ứng dụng vào việc phân tích kết cấu thanh với các tham số vật liệu, hình học và tải trọng là các tham số khoảng. Các kết quả nhận được xấp xỉ tốt với nghiệm chính xác và có thể ứng dụng vào thực tế.

2. Đặc điểm đại số khoảng và sự mở rộng "tự nhiên" phương pháp PTHH khoảng

a) Đối với biểu thức đại số $f(x)=x^2-x$ với $x\in[-1,1]$, bằng cách đánh giá thông thường, ta nhận được vùng giá trị của hàm số f trên khoảng $[-1,1]$ là

$$f(x)=x^2-x=[-1,1]^2-[-1,1]=[0,1]-[-1,1]=[-1,2]$$

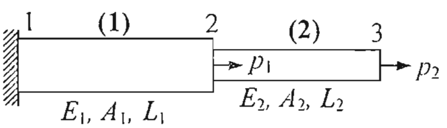
Mặt khác, ta có thể biểu diễn

$$\{f(x)=x^2-x=(x-0.5)^2-0.25|x\in[-1,1]\}=[-0.25,2]$$

Như vậy, vùng giá trị hàm số khoảng f có bao hàm vùng giá trị chính xác, nhưng nó đưa ra giá trị cận dưới là quá rộng từ -0.25 tới -1. Đó là do trong tính toán số học khoảng, mỗi lần xuất hiện của một biến khoảng nào đó thì nó lại được xem như là một biến khoảng khác, độc lập với biến khoảng ban đầu, nghĩa là, số học khoảng tính biểu thức x^2-x như là $x_1^2 - x_2$ trong đó $x_1 = [-1, 1]$, $x_2 = [-1, 1]$.

Sự mở rộng khoảng như vậy được gọi là *sự ước tính quá mức do bài toán phụ thuộc* hay đơn giản gọi là *bài toán phụ thuộc* [5,8]. Đối với các hàm số mà tham số khoảng xuất hiện chỉ một lần thì sẽ không xảy ra bài toán phụ thuộc và ta nhận được vùng giá trị chính xác của hàm số. Đối với các hàm số mà tham số khoảng xuất hiện nhiều hơn một lần thì sẽ xảy ra bài toán phụ thuộc. Nếu bằng cách nào đó ta giảm được số lần xuất hiện của tham số khoảng, thì ta có thể tránh được bài toán phụ thuộc. Do bài toán phụ thuộc, chỉ còn một số luật đại số của số thực vẫn còn đúng cho đại số khoảng, các luật khác chỉ giữ ở một dạng yếu hơn [5]. *Thành công của phép phân tích khoảng phụ thuộc vào việc sự giảm bớt sự phụ thuộc.*

b) Khi thay thế các tham số và phép toán trong phương pháp PTHH thông thường bằng các tham số khoảng và phép toán khoảng tương ứng sẽ *mang lại kết quả là khoảng nghiệm quá rộng, không còn ý nghĩa thực tế*. Chẳng hạn, xét hệ gồm hai thanh chịu tải trọng dọc trục tại nút 2 và 3 như hình 1, các thanh chỉ có chuyển vị dọc trục. Ký hiệu A là diện tích tiết diện, E là môđun đàn hồi, L là chiều dài của từng thanh, độ cứng tương ứng của các thanh là k_1 và k_2 với $k_i=E_iA_i/L_i$, $i=1,2$.



Hình 1.

Phương trình cân bằng kết cấu có dạng

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

trong đó u_1, u_2 là chuyển vị dọc trục của nút 2 và nút 3. Giả thiết các độ cứng k_1, k_2 được biểu diễn bằng các số khoảng $k_1 = [0.95, 1.05]$ và $k_2 = [1.9, 2.1]$, các tải trọng được coi là tiền định và có giá trị p_1=0.5, p_2=1.0. Do đó

$$\begin{pmatrix} [2.85, 3.15] & [-2.1, -1.9] \\ [-2.1, -1.9] & [2.1, 1.9] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Sử dụng phần mềm *b4m* để giải hệ phương trình khoảng tuyến tính (2), ta có

$$u_1 = [-0.0521, 3.0521];\ u_2 = [0.0983, 3.9017]$$

Mặt khác, ta tìm được khoảng chính xác của u_1, u_2 bằng cách nghịch đảo ma trận

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{k_1} & \dfrac{1}{k_1} \\ \dfrac{1}{k_1} & \dfrac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \end{pmatrix}$$

Do vậy chuyển vị tìm được là

$$u_1 = \frac{p_1}{k_1} + \frac{p_2}{k_1} = \frac{p_1 + p_2}{k_1} = \frac{1.5}{[0.95, 1.05]} = [1.4286, 1.5789]$$

$$u_2 = \frac{p_1}{k_1} + \frac{(k_1 + k_2)p_2}{k_1 k_2} = \frac{p_1 + p_2}{k_1} + \frac{p_2}{k_2} = \frac{1.5}{[0.95, 1.05]} + \frac{1}{[1.9, 2.1]} = [1.9048, 2.1053]$$

Tất nhiên là các biểu thức khoảng ở trên đã được lập theo cách là các tham số khoảng chỉ xuất hiện một lần để tránh bài toán phụ thuộc, từ đó ta thu được khoảng chính xác của chuyển vị nút. Mặc dù các biên tìm được bằng phương pháp PTHH khoảng "tự nhiên" có chứa khoảng giá trị chính xác nhưng chúng quá rộng, đồng thời nó cũng không đưa ra được dấu chính xác của cận dưới u_1. Đó là do *số học khoảng xem rằng, tất cả các hệ số khoảng trong ma trận độ cứng thay đổi độc lập trong khoảng giá trị của chúng*. Ví dụ, số học khoảng xem hai số khoảng $k_2 = [-2.1, -1.9]$ trong phương trình (2) như là hai số khoảng độc lập có cùng cận trên và cận dưới. Tuy vậy về mặt cơ học, hai số khoảng này chính là hệ số $-k_2$ trong phương trình (1) và có cùng một giá trị.

Đặc điểm này có ảnh hưởng lớn đến việc xây dựng phương pháp PTHH khoảng nhằm xác định các số khoảng biểu diễn các tham số vật lý đơn lẻ và thu được khoảng kết quả không mở rộng quá mức. Để phương pháp PTHH khoảng cho nghiệm gần đúng nhất thì ta cần *giảm số lần xuất hiện của cùng một biến khoảng trong tính toán và chỉ sử dụng số học khoảng khi cần thiết, càng muộn càng tốt.*

3. Phương pháp PTHH khoảng

3.1. Tách các tham số khoảng trong ma trận độ cứng

Giả thiết môđun đàn hồi E là không chắc chắn, được mô tả bằng tham số khoảng $E = [\underline{E}, \overline{E}]$ hay là

$$\boldsymbol{E} = \breve{E}(1 + \delta) \tag{3}$$

với $\breve{E}$ là điểm giữa của $\boldsymbol{E}$; δ là nhân tử khoảng của $\boldsymbol{E}$

$$\breve{E} = \frac{\underline{E} + \overline{E}}{2}\,;\ \delta = \frac{E}{\breve{E}} - 1 = [-rad(E)/\breve{E}, rad(E)/\breve{E}];\ rad(E) = \frac{\overline{E} - \underline{E}}{2}$$

Ta nhận được ma trận độ cứng khoảng $\boldsymbol{k}$ của PTHH gồm phần xác định $\breve{k}$ là ma trận độ cứng xác định theo giá trị điểm giữa $\breve{E}$ bằng phương pháp PTHH thông thường và phần khoảng $\breve{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{d}$

$$\boldsymbol{k} = \breve{k}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{d}) \tag{4}$$

với $\boldsymbol{I}$ là ma trận đơn vị; $\boldsymbol{d}$ là ma trận đường chéo khoảng, gọi là ma trận nhân tử khoảng của phần tử hữu hạn

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} \delta & & \\ & \cdots & \\ & & \delta \end{pmatrix} \tag{5}$$

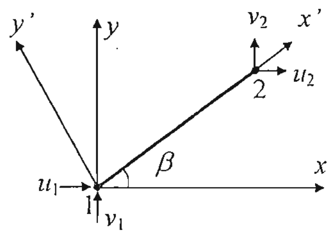
Trường hợp các tham số khác như chiều dài thanh, bề dày tấm, diện tích tiết diện, độ cứng chống uốn,... là các tham số khoảng, ta cũng có thể biểu diễn ma trận độ cứng của PTHH dưới dạng (4). Để làm ví dụ, ta xét một phần tử thanh thẳng chịu kéo nén có chiều dài L, diện tích tiết diện A không đổi, mô đun đàn hồi E như hình 2. Ma trận độ cứng của PTHH trong hệ tọa độ địa phương là

$$k' = \begin{pmatrix} \dfrac{EA}{L} & -\dfrac{EA}{L} \\ -\dfrac{EA}{L} & \dfrac{EA}{L} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Giả thiết mô đun đàn hồi E là không chắc chắn và được mô tả bằng một tham số khoảng $\boldsymbol{E}$ có dạng (3). Thay vào (6), ta có

$$\boldsymbol{k}' = \begin{pmatrix} \dfrac{\breve{E}A}{L} & -\dfrac{\breve{E}A}{L} \\ -\dfrac{\breve{E}A}{L} & \dfrac{\breve{E}A}{L} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \right) = \breve{k}' \left(I + d \right) \tag{7}$$

Hình 2.



Hình 3.

Đối với phần tử thanh có hướng bất kì như hình 3, ma trận độ cứng của PTHH trong hệ toạ độ tổng thể là

$$\boldsymbol{k}'' = T_e^T \boldsymbol{k}' T_e \tag{8}$$

trong đó $\boldsymbol{T_e}$ là ma trận chuyển đổi

$$T_e = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \tag{9}$$

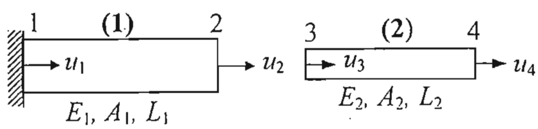
Thay (3) vào (8), ta nhận được ma trận độ cứng khoảng của PTHH có dạng (4).

3.2. Ghép các phần tử theo phương pháp EBE. Xử lý các điều kiện biên và ràng buộc theo phương pháp hàm phạt

Trong phương pháp PTHH khoảng, việc lắp ghép ma trận độ cứng của kết cấu từ các ma trận độ cứng của từng PTHH theo phương pháp độ cứng trực tiếp sẽ dẫn đến bài toán phụ thuộc vì rằng hai hệ số $\boldsymbol{K}_{ij}$ và $\boldsymbol{K}_{mn}$ nào đó có thể xuất phát từ cùng một phần tử, do vậy, chúng phụ thuộc lẫn nhau nhưng số học khoảng không thể tự động nhận biết được sự phụ thuộc này.

Để khắc phục khó khăn này, Muhanna và Mullen đã đề xuất phương pháp *tách từng phần tử* (element by element – EBE) trong quá trình tập hợp các phần tử theo phương pháp PTHH khoảng. Tư tưởng cơ bản của phương pháp này là tách rời các PTHH để không có bất kì một liên kết nào giữa các phần tử, tránh được sự phụ thuộc trong quá trình tập hợp phần tử. Do đó một nút gốc liên kết hai phần tử sẽ xuất hiện trong cả hai PTHH nhưng có số thứ tự nút khác nhau, mỗi nút thuộc về chỉ một phần tử. Kết cấu bị tách ra này là *mô hình EBE* của kết cấu ban đầu. Ví dụ, mô hình EBE của kết cấu trên hình 1 được thể hiện trên hình 4. Nút liên kết giữa phần tử **1** và **2** được tách ra thành hai nút riêng biệt: nút số 2 ở phần tử **1** và nút số 3 ở phần tử **2**. Chuyển vị dọc trục tại các nút được biểu thị lần lượt là u_i, $i=1,\ldots,4$. Ma trận độ cứng K của kết cấu trong mô hình EBE là

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{E_1A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{E_2A_2}{L_2} & -\dfrac{E_2A_2}{L_2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{E_2A_2}{L_2} & \dfrac{E_2A_2}{L_2} \end{pmatrix} \tag{10}$$



Hình 4. Mô hình EBE

Điều kiện biên $u_1=0$ được đưa vào ma trận K. Theo phương pháp EBE, ma trận này có dạng đường chéo khối

$$K=\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_{N_e} \end{pmatrix} \tag{11}$$

trong đó các ma trận đường chéo con là ma trận độ cứng của phần tử k_i tương ứng với $i=1,\ldots,N_e$ và N_e là số phần tử trong kết cấu.

Vì các PTHH không được kết nối nên ma trận độ cứng K trong (11) là ma trận suy biến kể cả sau khi ta đã áp đặt các điều kiện biên. Để kết nối các phần tử và khử tính suy biến của ma trận K, ta cần đưa vào thêm các ràng buộc theo *phương pháp hàm phạt*. Số phạt phải đủ lớn để thỏa mãn các điều kiện ràng buộc nhưng không quá lớn làm cho phương trình cân bằng trở nên không ổn định, nghiệm thu được rất nhạy cảm với sai số. Phương pháp hàm phạt có ưu điểm là dễ sử dụng, việc bổ sung số phạt vào ma trận độ cứng của kết cấu là đơn giản và không đòi hỏi các phương trình bổ sung.

Khi chuyển đổi mô hình PTHH thông thường sang mô hình EBE tương ứng, một nút chung sẽ xuất hiện ở các phần tử khác nhau nhưng với số thứ tự nút khác nhau. Do sự xuất hiện nhiều lần của những nút chung, tổng số nút trong mô hình EBE sẽ tăng lên tới N_n với N_n =(số lượng nút của phần tử) × (số phần tử N_e), do đó, số bậc tự do trong hệ tăng lên tới N_e×(số bậc tự do của một phần tử). Tuy kích thước của hệ tăng nhưng việc sử dụng phương pháp EBE có thuận lợi là tránh được bài toán phụ thuộc trong quá trình tập hợp phần tử và cho phép tách các tham số khoảng. Thay (4) vào (11), ma trận độ cứng khoảng $\boldsymbol{K}$ của kết cấu có dạng

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \boldsymbol{k}_{N_e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \breve{k}_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \breve{k}_{N_e} \end{pmatrix} \left(I + \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \boldsymbol{d}_{N_e} \end{pmatrix} \right) \qquad (12)$$

hay $\boldsymbol{K} = \breve{K}(I + \boldsymbol{D})$ (13)

trong đó $\boldsymbol{D}$ được gọi là ma trận nhân tử khoảng của kết cấu với các ma trận con d_i là các ma trận đường chéo khoảng nên $\boldsymbol{D}$ cũng có dạng đường chéo. Biểu thức (13) cho thấy rằng ma trận độ cứng kết cấu có thể phân tích thành hai ma trận: một ma trận số thực và một ma trận đường chéo khoảng. Điều này rất quan trọng cho việc dò tìm những biến khoảng khi giải phương trình khoảng cho cả kết cấu. Ngoài ra cần lưu ý rằng trong ma trận $\boldsymbol{D}$, mỗi nhân tử khoảng xuất hiện n_i lần, ví dụ, đối với mô hình EBE của kết cấu gồm hai phần tử thanh, mỗi phần tử có hai bậc tự do nên

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 & \\ & \boldsymbol{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 & & & \\ & \boldsymbol{\delta}_2 & & \\ & & \boldsymbol{\delta}_3 & \\ & & & \boldsymbol{\delta}_4 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Sự xuất hiện nhiều lần của δ là nguyên nhân dẫn đến bài toán phụ thuộc, dưới đây, ta sẽ quan tâm tới việc loại bỏ sự phụ thuộc này.

3.3. Tải trọng nút khoảng

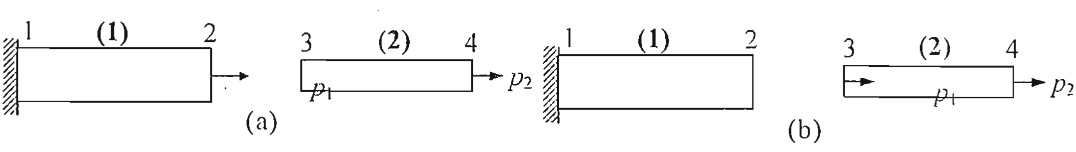
Giả thiết tại nút chung i của t phần tử khác nhau trong kết cấu có đặt tải trọng ngoài p_i. Nút chung i này sẽ xuất hiện ở t phần tử khác nhau trong mô hình EBE với các nút tương ứng là i_1, ..., i_t và tải trọng đặt tại các nút này là p_{i_1}, ..., p_{i_t}. Khi p_i là xác định, p_{i_1}, ..., p_{i_t} có thể được lựa chọn một cách tuỳ ý miễn là thoả mãn điều kiện

$$p_i = \sum_{j=1}^{t} p_{i_j} \qquad (15)$$

Khi p_i là đại lượng không chắc chắn và biến thiên trong khoảng $\boldsymbol{p}_i$, ta có

$$\boldsymbol{p}_i = \sum_{j=1}^{t} \boldsymbol{p}_{i_j} \qquad (16)$$

Để giảm số lượng biến khoảng trong tính toán, ta có thể chọn tải trọng khoảng hoàn toàn đặt tại một nút, những nút còn lại tải trọng đặt bằng *0*



Hình 5

$$p_{i_1} = p_i \quad p_{i_j} = 0 \ \forall \ j = 2,...,t \tag{17}$$

Đối với kết cấu trên hình 1, tải trọng p_I có thể đặt tại nút 2 (hình 5.a) hay tại nút 3 (hình 5.b). Khi tải trọng p_I đặt tại nút 2, véc tơ tải trọng có dạng

$$p = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & p_2 \end{pmatrix}^T \tag{18}$$

4. Một số ví dụ tính toán

4.1. Ví dụ 1

Kết cấu gồm hai thanh có mô đun đàn hồi E, diện tích A_1, A_2, kích thước $L_1=L_2=1,5m$ và chịu tải trọng P_1, P_2 như hình 1. Cần xác định chuyển vị tại các nút và lực dọc trong các thanh theo phương pháp PTHH khoảng và so sánh với nghiệm giải tích tương ứng cho các trường hợp:

1) Các số liệu về vật liệu, hình học là điểm, số liệu về tải trọng là khoảng: E=2.10^8(kN/m^2), A_1=10.10^{-4}(m^2), A_2=7.10^{-4}(m^2), P_1=[28.5, 31.5](kN) , P_2=[47.5, 52.5](kN).
2) Các số liệu về vật liệu, hình học, tải trọng đều là khoảng: E=[195,205].10^6(kN/m^2), A_1=[9.75,10.25].10^{-4}(m^2), A_2=[6.825,7.175].10^{-4}(m^2), P_1=[28.5,31.5](kN), P_2=[47.5,52.5](kN).

Việc xác định số phạt dựa trên yêu cầu kết quả tính chuyển vị theo PTHH khoảng phải trùng với kết quả giải tích khi các tham số đầu vào là điểm. Trong bài toán này ta có thể chọn số phạt trong khoảng $10^7 \div 10^{15}$, cụ thể là $\eta = 10^8$. Khi không có nghiệm giải tích, việc lựa chọn số phạt căn cứ vào điều kiện tương thích của chuyển vị tại các nút chung giữa các phần tử trong mô hình EBE. Cũng có thể lấy số phạt trong mô hình PTHH thông thường là số phạt cho phương pháp PTHH khoảng.

Để giải hệ phương trình tuyến tính khoảng, tác giả sử dụng phép giải lặp Krawczyk [5]. Đây là một phép lặp cho kết quả nhanh, tin cậy so với các phép giải khác như khử khoảng Gauss hay lặp khoảng Gauss-Seidel.

Bảng 1 và 2 là kết quả tính chuyển vị nút và lực dọc theo phương pháp giải tích và phương pháp PTHH khoảng khi E, A_1, A_2 là giá trị điểm; P_1, P_2 là giá trị khoảng (trường hợp 1).

Bảng 1: Kết quả tính chuyển vị nút

Chuyển vị	Nghiệm giải tích (m)	Nghiệm theo chuong trình (m)
u_1	[0.00000, 0.00000]	[0.0000, 0.0001]
u_2	[0.00057, 0.00063]	[0.0005, 0.0007]
u_3	[0.00057, 0.00063]	[0.0005, 0.0007]
u_4	[0.00107, 0.000119]	[0.0010, 0.0012]

Bảng 2: Kết quả tính lực dọc

Phần tử	Nghiệm giải tích (kN)	Nghiệm theo chuong trình (kN)
1	[76, 84]	[75.9999, 84.0001]
2	[47.5, 52.5]	[47.5000, 52.5000]

Bảng 3 và 4 là kết quả tính chuyển vị nút và lực dọc theo phương pháp giải tích và phương pháp PTHH khoảng khi E, A_1, A_2 , P_1, P_2 là giá trị khoảng (trường hợp 2).

Bảng 3: Kết quả tính chuyển vị nút

Chuyển vị	Nghiệm giải tích (m)	Nghiệm theo chương trình (m)
u_1	[0.0000, 0.0000]	[0.0000, 0.0001]
u_2	[0.0005425, 0.0006628]	[0.0004, 0.0008]
u_3	[0.0005425, 0.0006628]	[0.0004, 0.0008]
u_4	[0.0010, 0.0013]	[0.0009, 0.0014]

Bảng 4: Kết quả tính lực dọc

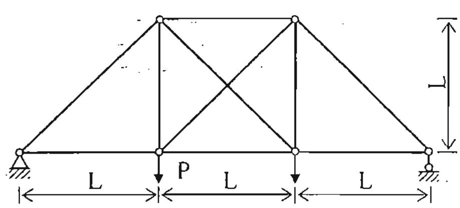
Phần tử	Nghiệm giải tích (kN)	Nghiệm theo chương trình (kN)
1	[76.0, 84.0]	[75.6801, 84.3199]
2	[47.5, 52.5]	[47.5000, 52.5000]

Từ các kết quả trên, ta rút ra các nhận xét:

- Trong các trường hợp tính toán, nghiệm giải tích luôn đưa ra kết quả là một khoảng hẹp nhất so với các kết quả tính theo chương trình. Khoảng nghiệm tìm được theo phương pháp PTHH khoảng khá gần với nghiệm giải tích, đã cải thiện đáng kể so với khoảng nghiệm tìm được theo sự mở rộng "tự nhiên" của phương pháp PTHH thông thường.
- Kết quả tính chuyển vị nút theo chương trình có sai số với nghiệm giải tích nhưng kết quả tính lực dọc theo chương trình là xấp xỉ tốt với nghiệm giải tích. Đó là do trong bài toán tĩnh định thì lực dọc không phụ thuộc vào môđun đàn hồi và diện tích tiết diện.
- Khi các tham số môđun đàn hồi, diện tích tiết diện, tải trọng đều là các giá trị khoảng thì kết quả tính toán là khoảng rộng hơn so với trường hợp chỉ có tải trọng là đại lượng khoảng.

4.2. Ví dụ 2

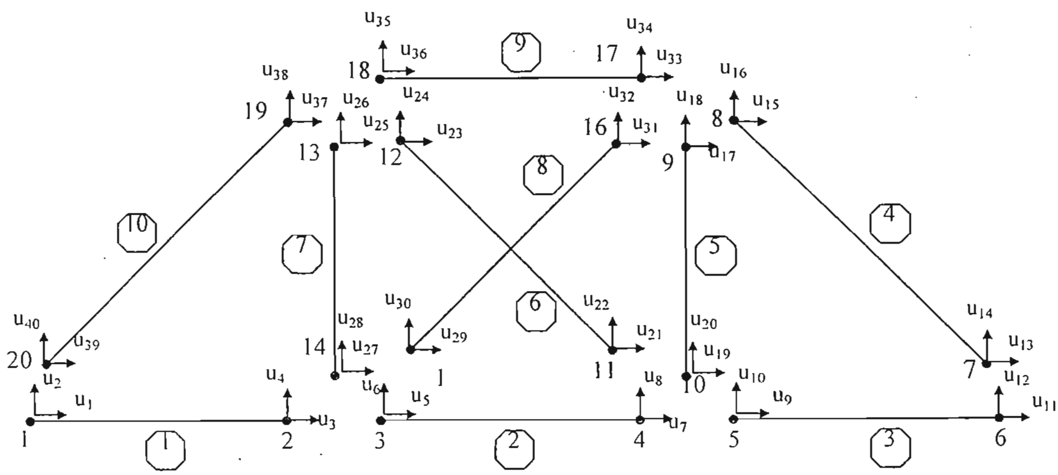
Xác định các chuyển vị nút theo phương pháp PTHH khoảng và so sánh với nghiệm giải tích đối với dàn phẳng siêu tĩnh (hình 6) gồm 10 thanh có diện tích A, mô đun đàn hồi E và chịu tải trọng P. Các số liệu về vật liệu, hình học, tải trọng đều là các đại lượng khoảng: E=[195, 205].10^6(kN/m^2), A=[9.75, 10.25].10^{-4}(m^2), P=[133, 147](kN), L=4.5(m).



Hình 6.

Sơ đồ rời rạc hóa dàn phẳng theo phương pháp PTHH khoảng được thể hiện trên hình 7 gồm 10 thanh với 40 chuyển vị nút $u = (u_1, u_2, \cdots, u_{40})$. Bảng 5 thể hiện việc so sánh kết quả tính chuyển vị theo phương pháp PTHH khoảng với chuyển vị theo nghiệm giải tích.

Ta nhận thấy, nghiệm giải tích luôn đưa ra kết quả là một khoảng hẹp nhất so với các kết quả tính theo chương trình. Kết quả nhận được xấp xỉ tốt với nghiệm chính xác cho thấy cách giải đã khắc phục được đặc điểm bài toán phụ thuộc của đại số khoảng, do đó, có thể ứng dụng vào phân tích các kết cấu phức tạp hơn với các số liệu về vật liệu, hình học và tải trọng là các đại lượng khoảng.



Hình 7: Sơ đồ rời rạc hóa theo phương pháp PTHH khoảng

Bảng 5: Kết quả tính chuyển vị nút.

Chuyển vị nút	Nghiệm giải tích (m)	Nghiệm theo chương trình (m)	Chuyển vị nút	Nghiệm giải tích (m)	Nghiệm theo chương trình (m)
1	[0, 0]	[0.0000, 0.0001]	21	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]
2	[0, 0]	[-0.0001, 0.0001]	22	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]
3	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]	23	[0.0061, 0.0065]	[0.0056, 0.0070]
4	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	24	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]
5	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]	25	[0.0061, 0.0065]	[0.0056, 0.0070]
6	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	26	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]
7	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]	27	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]
8	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	28	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]
9	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]	29	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]
10	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	30	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]
11	[0.0086, 0.009]	[0.0079, 0.0097]	31	[0.0024, 0.0026]	[0.0021, 0.0029]
12	[0, 0]	[-0.0001, 0.0001]	32	[-0.016, -0:0144]	[-0.0165, -0.0140]
13	[0.0086, 0.009]	[0.0079, 0.0097]	33	[0.0024, 0.0026]	[0.0021, 0.0029]
14	[0, 0]	[-0.0001, -0.0000]	34	[-0.016, -0.0144]	[-0.0165, -0.0140]
15	[0.0024, 0.0026]	[0.0021, 0.0029]	35	[0.006, 0.0066]	[0.0056, 0.0070]
16	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]	36	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]
17	[0.0024, 0.0026]	[0.0021, 0.0029]	37	[0.0061, 0.0065]	[0.0056, 0.0070]
18	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]	38	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]
19	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]	39	[0, 0]	[-0.0001, -0.0000]
20	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	40	[0, 0]	[-0.0001, -0.0000]

5. Kết luận

a) Nếu các số liệu về vật liệu, hình học, liên kết, tải trọng cũng như chính việc mô hình hóa và phân tích kết cấu có chứa nhiều yếu tố không chắc chắn thì ta phải sử dụng mô hình các yếu tố không chắc chắn phi xác suất như lý thuyết tập mờ, phương pháp khoảng, lý thuyết tập ngẫu nhiên, mô hình lồi,... Phương pháp khoảng mang lại một cách biểu diễn đơn giản, gọn nhẹ và có hiệu quả tính toán cao đối với các yếu tố không chắc chắn khi chỉ có thông tin về vùng giá trị của đại lượng này mà không gán một cấu trúc xác suất nào cả.

b) Khi tính toán khoảng, cần phải chú ý đến đặc điểm bài toán phụ thuộc là nguyên nhân cơ bản để dẫn tới kết quả không chính xác, từ đó, phải có cách xử lý thích hợp. Đồng thời chỉ thực hiện phép tính số học khoảng khi thật cần thiết, càng muộn càng tốt.

c) Đã ứng dụng phương pháp PTHH khoảng đang phát triển hiện nay trên thế giới để tính toán các kết cấu thanh chịu tải trọng tĩnh với các yếu tố không chắc chắn là những đại lượng khoảng bị chặn trên và chặn dưới nhưng không gắn với một cấu trúc xác suất nào. Khi ứng dụng phương pháp PTHH khoảng cần:
   - Tách tham số khoảng trong ma trận độ cứng.
   - Dùng mô hình EBE kết hợp phương pháp hàm phạt để xử lý các điều kiện biên và các ràng buộc.
   - Chỉ thực hiện phép tính số học khoảng khi thật cần thiết, càng muộn càng tốt.

d) Đã xây dựng chương trình tính toán kết cấu hệ thanh theo phương pháp PTHH khoảng trong MatLab với các tham số vật liệu, hình học, tải trọng là tham số khoảng. Chương trình sử dụng phép giải lặp Krawczyk để giải hệ phương trình tuyến tính khoảng. Các kết quả nhận được xấp xỉ tốt với nghiệm chính xác và có thể ứng dụng vào thực tế.

Tài liệu tham khảo

[1] Phan Xuân Minh, Nguyễn Doãn Phước (2002), *Lý thuyết điều khiển mờ và ứng dụng*, NXB KHKT, Hà nội.

[2] Nguyễn Như Phong (2005), "*Lý thuyết mờ và ứng dụng*", NXB KHKT.

[3] Andrew Bernat, Vladik Kreinovich, Thomas J McLean and Gennady N Solopchenko (1995), "*What are interval computations and how are they related to quality in manufacturing*".

[4] Scott Ferson, Roger B. Nelsen, Janos Hajagos,... (2004), "*Dependence in probabilistic modeling, Dempster-Shafer theory, and probability bounds analysis*".

[5] Gareth I Hargreaves (2002), "*Interval analysis in Matlab*", A dissertation submitted to the University of Manchester for the degree of Master of science, Dec.

[6] Hao Zhang (2005), "*Nondeterministic linear static finite element analysis: An Interval Approach*", School of Civil and Environmental Engineering Georgia Institute of Techonology, Dec.

[7] Jens Zemke, "*B4m: A free interval arithmetic toolbox for Matlab based on BIAS version 1.02.004 & documentation version 1.00* ",

[8] R B Kearfott, "*Interval computations introduction uses and resources*", University of SouthWestern Louisiana.

[9] Vladik Kreinovich Ô Jan Beck, Hung T. Nguyen, (2005), "*Ellipsoids and ellipsoid-shaped fuzzy sets as natural multi-variate generalization of intervals and fuzzy numbers: How to elicitt them from users, and how to use them in data processing ?*".

[10] Olaf Knÿppel, (1999), "*PROFIL/BIAS V 2.0* ".

[11] Rafi L. Muhanna, Robert L. Mullen (2004), "*Proceedings of the NSF workshop on reliable engineering computing*", September 15-17.

[12] Rafi L. Muhanna & Robert L. Mullen, (2006), "*Proceedings of the NSF workshop on reliable engineering computing – Modeling errors and uncertainty in engineering computation*" February 20-24.

[13] Zimmerman, H. J. (1991), *Fuzzy sets theory and its applications*, Kluwer academic publishers.