

*Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học toàn quốc
Cơ học Vật rắn biến dạng lần thứ 8
Thái Nguyên, 25-26/8/2006*

Xác định lực tới hạn mất ổn định của hệ thanh bằng phương pháp ma trận độ cứng động lực

Trần Văn Liên, Nguyễn Anh Minh

Trường Đại học Xây dựng

Tóm tắt. Trong bài báo này, các tác giả trình bày một ứng dụng của phương pháp ma trận độ cứng động lực vào việc xác định lực tới hạn gây mất ổn định của các hệ thanh đàn hồi chịu nén bởi các lực bảo toàn và không bảo toàn theo tiêu chuẩn ổn định động lực học. Đối với các hệ thanh đơn giản, kết quả nhận được trong bài báo này là trùng với các kết quả đã được các tác giả khác công bố.

1. Mở đầu

Để xác định lực tới hạn (hay tham số của lực tới hạn) gây mất ổn định, người ta đã xây dựng nhiều phương pháp khác nhau xuất phát từ các tiêu chuẩn cân bằng về ổn định. Mỗi tiêu chuẩn đều có một phạm vi áp dụng nhất định [2,5,6].

Tiêu chuẩn cân bằng ổn định động lực học được xây dựng trên cơ sở nghiên cứu chuyển động của hệ sau khi bị lệch ra khỏi dạng cân bằng ban đầu bởi một nhiễu loạn nào đó. Nếu hệ dao động tắt dần hay trở về trạng thái cân bằng ban đầu thì sự cân bằng là ổn định, ngược lại là không ổn định. Tuy phức tạp nhưng tiêu chuẩn ổn định động lực học được xem là đầy đủ và tổng quát, giải quyết được các bài toán ổn định mà các tiêu chuẩn tĩnh học không thể giải quyết được:

- Đối với các bài toán ổn định cân bằng của hệ đàn hồi chịu lực bảo toàn thường gặp trong các công trình xây dựng, thì về nguyên tắc các tiêu chuẩn trên đều dẫn đến cùng một kết quả.
- Đối với các bài toán ổn định cân bằng của hệ đàn hồi chịu lực không bảo toàn thì nhất định phải sử dụng các tiêu chuẩn động lực học.

Trong bài báo này, các tác giả trình bày một ứng dụng của phương pháp ma trận độ cứng động lực (MTĐCĐL) [1,3] vào việc xác định lực tới hạn gây mất ổn định của các hệ thanh chịu nén bởi các lực bảo toàn và không bảo toàn theo tiêu chuẩn ổn định động lực học. Đối với các hệ thanh đơn giản, kết quả nhận được trong bài báo này là trùng với các kết quả đã được các tác giả khác công bố.

2. MẪU DẠNG của phần tử thanh chịu uốn có xét đến ảnh hưởng lực dọc

Theo tiêu chuẩn ổn định động lực học, ta nhận được phương trình dao động tự do của thanh thẳng chịu uốn ngang và uốn dọc bởi lực dọc P không đổi [4]

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

với $P > 0$ nếu thanh chịu nén, $P < 0$ nếu thanh chịu kéo (hình 1). Bằng cách đặt

$$w(x, t) = y(x) e^{i\omega t} \quad (2)$$

với ω là tần số dao động (rad/giây), từ (1) ta nhận được

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = \rho A \omega^2 y \quad (3)$$

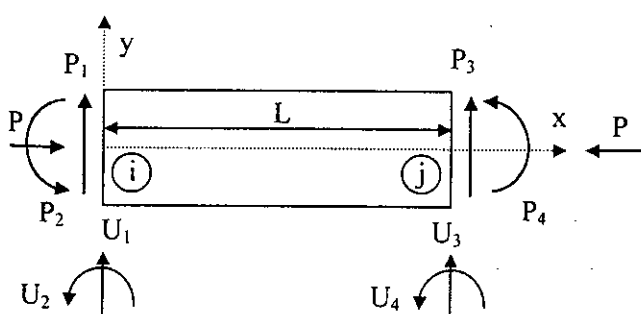
Nghiệm của phương trình này có dạng

$$y(x) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^T \quad (4)$$

với các hàm dạng là

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{bmatrix} \cos \alpha \zeta \\ \sin \alpha \zeta \\ \cosh \beta \zeta \\ \sinh \beta \zeta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \beta^2 - F_4 & F_2 L & -F_3 & F_1 L \\ -F_6 / \alpha & (\alpha + F_4 / \alpha) L & -F_5 / \alpha & -F_3 L / \alpha \\ \alpha^2 + F_4 & -F_2 L & F_3 & -F_1 L \\ F_6 / \beta & (\beta - F_4 / \beta) L & F_5 / \beta & F_3 L / \beta \end{bmatrix} \quad (5)$$

trong đó $\zeta = x/L$ là tham số chiều dài không thứ nguyên.



Hình 1. Phần tử thanh chịu uốn và nén dọc

- σ là tham số kể đến ảnh hưởng của lực dọc

$$\sigma = \frac{PL^2}{EI} \quad (6)$$

- λ là tham số động lực

$$\lambda = \omega L^2 \times \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (7)$$

- α, β là các tham số

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \lambda^2}}; \beta = \sqrt{-\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \lambda^2}} \quad (8)$$

- Các hàm số F_i được định nghĩa là

$$\begin{aligned}
F_1 &= (\beta \sin \alpha - \alpha \sinh \beta)(\alpha^2 + \beta^2) / \delta \\
F_2 &= (\alpha \cos \alpha \sinh \beta - \beta \sin \alpha \cosh \beta)(\alpha^2 + \beta^2) / \delta \\
F_3 &= (\cos \alpha - \cosh \beta) \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) / \delta \\
F_4 &= [(\beta^2 - \alpha^2)(\cos \alpha \cosh \beta - 1) + 2\alpha \beta \sin \alpha \sinh \beta] \alpha \beta / \delta \quad (9) \\
F_5 &= (\beta \sinh \beta + \alpha \sin \alpha)(\alpha^2 + \beta^2) \alpha \beta / \delta \\
F_6 &= -(\alpha \cosh \beta \sin \alpha + \beta \sinh \beta \cos \alpha)(\alpha^2 + \beta^2) \alpha \beta / \delta \\
\delta &= 2\alpha \beta (\cos \alpha \cosh \beta - 1) + (\alpha^2 - \beta^2) \sin \alpha \sinh \beta
\end{aligned}$$

Ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh chịu uốn có kể đến ảnh hưởng của lực dọc có dạng

$$\hat{K}_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & -F_4 L & F_5 & F_3 L \\ -F_4 L & F_2 L^2 & -F_3 L & F_1 L^2 \\ F_5 & -F_3 L & F_6 & F_4 L \\ F_3 L & F_1 L^2 & F_4 L & F_2 L^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

3. Phân tích ổn định của hệ thanh chịu nén bằng phương pháp MTĐCĐL

Trong các bài toán ổn định, tải trọng P được xem như là một tính chất đặc trưng của hệ mà không được xem là tải trọng. Khi đó, bài toán ổn định của các hệ thanh chịu nén bởi các lực bảo toàn hay không bảo toàn đưa về bài toán xác định tải trọng tới hạn P sao cho

$$\det \hat{K}(\omega, P) = 0 \quad (11)$$

trong đó $\hat{K}(\omega, P)$ là ma trận độ cứng động lực của phần tử hay hệ thanh. Nói chung, tần số dao động riêng ω là một số phức có dạng $\omega = a + ib$. Khi phần ảo b là một số âm ($b < 0$), từ (2) ta nhận được

$$w(x, t) = y(x) e^{i\omega t} = y(x) e^{i(a+ib)t} = y(x) e^{(ia-b)t} \quad (12)$$

Lúc này, hệ sẽ mất ổn định do sự tăng dần biên độ chuyển động của các chuyển động bé của hệ ở lân cận vị trí cân bằng. Như vậy, giá trị tải trọng tới hạn được xác định từ điều kiện tần số dao động riêng ω là một số phức có phần ảo âm.

3.1. Thanh chịu nén bởi lực có phương thẳng đứng (lực bảo toàn)

Xem thanh là một phần tử (hình 2), sau khi khử dạng suy biến của ma trận độ cứng động lực (10) theo điều kiện biên ngàm tại nút $x=0$: $U_1 = 0$; $U_2 = 0$, ta nhận được phương trình xác định tải trọng tới hạn

$$\det \hat{K}^*(\omega, P) = \frac{EI}{L^3} \det \begin{vmatrix} F_6 & F_4 L \\ F_4 L & F_2 L^2 \end{vmatrix} = \frac{EI}{L^3} L^2 (F_6 \cdot F_2 - F_4^2) = 0$$

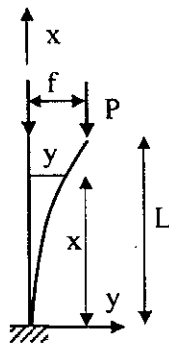
Sử dụng các đồng nhất thức

$$\alpha\beta = \lambda; \alpha^2 - \beta^2 = \sigma; (\alpha^2 + \beta^2)^2 = (\sigma^2 + 4\lambda^2)$$

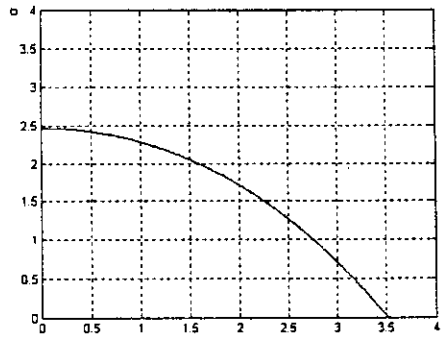
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x; \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$$

sau một số biến đổi, ta nhận được

$$F_6 F_2 - F_4^2 = -\frac{\lambda}{\delta} [2\lambda^2 - \sigma\lambda \sin \alpha \sinh \beta + (\sigma^2 + 2\lambda^2) \cos \alpha \cosh \beta] = 0 \quad (13)$$



Hình 2.



Hình 3. Đồ thị hàm số $\sigma = \sigma(\lambda)$

Phương trình này trùng với phương trình thu được bằng phương pháp giải tích [5] với giá trị tải trọng tới hạn là (hình 3)

$$P_{th}^* = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (14)$$

Kết quả tìm được là trùng với kết quả theo các tiêu chuẩn tĩnh học đã biết từ SBVL.

3.2. Thanh chịu nén bởi lực đuôi (lực không bảo toàn)

Đối với phần tử thanh chịu nén bởi lực đuôi đặt tại nút 2 ($x=L$), lực cắt tại nút 2 được biểu diễn dưới dạng

$$\bar{Q}_3 e^{i\omega t} = -EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L, t) = Q_3 e^{i\omega t} + P \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = Q_3 e^{i\omega t} + P \frac{\partial N(L, \omega)}{\partial x} \{u\} e^{i\omega t} \quad (15)$$

Khi đó, MTĐCĐL của phần tử thanh chịu lực đuôi đặt tại nút 2 ($x=L$) có dạng

$$\bar{K}(\omega, P) = \left[\hat{K}(\omega, P) + \left\{ P \frac{\partial N(L, \omega)}{\partial x} \right\} \right] \quad (16)$$

hay là

$$\bar{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & -F_4L & F_5 & F_3L \\ -F_4L & F_2L^2 & -F_3L & F_1L^2 \\ F_5 + \frac{PL^3}{EI} \frac{\partial N_1(L, \omega)}{\partial x} & -F_3L + \frac{PL^3}{EI} \frac{\partial N_2(L, \omega)}{\partial x} & F_6 + \frac{PL^3}{EI} \frac{\partial N_3(L, \omega)}{\partial x} & F_4L + \frac{PL^3}{EI} \frac{\partial N_4(L, \omega)}{\partial x} \\ F_3L & F_1L^2 & F_4L & F_2L^2 \end{bmatrix}$$

Xem thanh là một phần tử (hình 4), sau khi khử dạng suy biến của ma trận độ cứng động lực theo điều kiện biên tại $x=0$: $U_1 = 0$; $U_2 = 0$ và chú ý rằng

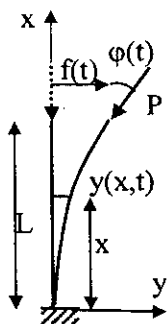
$$N_3(L, \omega) = 1; N_4(L, \omega) = 0; \frac{\partial N_3(L, \omega)}{\partial x} = 0; \frac{\partial N_4(L, \omega)}{\partial x} = 1 \quad (17)$$

Ta nhận được phương trình xác định lực tới hạn khi định thức của ma trận độ cứng động lực rút gọn bằng không

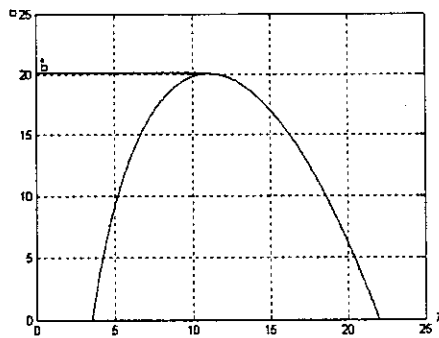
$$\det \bar{K}^*(\omega, P) = \frac{EI}{L^3} \det \begin{bmatrix} F_6 & F_4L + \frac{PL^3}{EI} \\ F_4L & F_2L^2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} L^2 (F_6F_2 - F_4^2 - \sigma F_4) = 0$$

Sử dụng (13), ta nhận được

$$F_6F_2 - F_4^2 - \sigma F_4 = -\frac{\lambda}{\delta} (2\lambda^2 + \sigma^2 + \sigma\lambda \sin \alpha \sinh \beta + 2\lambda^2 \cos \alpha \cosh \beta) \quad (18)$$



Hình 4.



Hình 5. Đồ thị hàm số $\sigma = \sigma(\lambda)$

Phương trình này trùng với phương trình thu được bằng phương pháp giải tích [5], với giá trị tải trọng tới hạn là (hình 5)

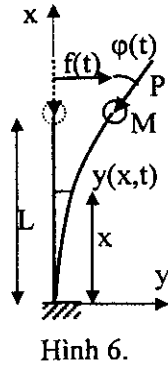
$$P_{th} = 20,05 \frac{EI}{L^2} \quad (19)$$

Giá trị tải trọng tới hạn của lực đuôi tìm được gấp 8,13 lần tải trọng tới hạn của thanh công xôn chịu nén bởi

lực thẳng đứng (14).

3.3. Ảnh hưởng của sự phân bố khối lượng tới giá trị lực tới hạn của thanh chịu nén bởi lực đuôi

Đối với thanh chịu nén bởi lực đuôi (hình 6) có khối lượng tập trung M đặt tại nút 2 ($x=L$), lực cắt tại nút 2 được biểu diễn dưới dạng



$$\begin{aligned} \bar{Q}_3 e^{i\omega t} &= -EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L, t) = Q_3 e^{i\omega t} + P \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) + M \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) \\ &= Q_3 e^{i\omega t} + P \frac{\partial N(L, \omega)}{\partial x} \{u\} e^{i\omega t} - \omega^2 M N(L, \omega) \{u\} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (20)$$

Khử dạng suy biến của MTĐCĐL theo điều kiện biên ngàm tại $x=0$: $U_1 = 0$; $U_2 = 0$ và từ (17), ta được MTĐCĐL rút gọn có dạng

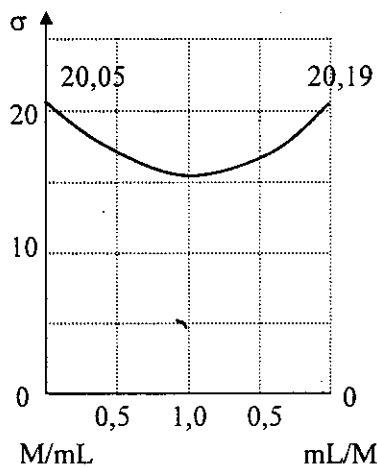
$$\bar{K}^*(\omega, P) = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 - \omega^2 \frac{ML^3}{EI} & F_4 L + \frac{PL^3}{EI} \\ F_4 L & F_2 L^2 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta nhận được phương trình

$$F_6 F_2 L^2 - F_4^2 L^2 - F_4 \frac{PL^4}{EI} - \omega^2 \frac{ML^5}{EI} F_2 = L^2 \left(F_6 F_2 - F_4^2 - \sigma F_4 - \omega^2 \frac{ML^3}{EI} F_2 \right) = 0 \quad (21)$$

Sử dụng (18), ta có

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma, \lambda) &= 2\lambda^2 + \sigma^2 + \sigma \lambda \sin \alpha \sinh \beta + 2\lambda^2 \cos \alpha \cosh \beta \\ &+ 2 \frac{M}{mL} \lambda \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \lambda^2} (\alpha \cos \alpha \sinh \beta - \beta \sin \alpha \cosh \beta) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$



Hình 7.

Phương trình này hoàn toàn trùng với phương trình được giải theo phương pháp giải tích [5]. Các kết quả tính toán bằng số phương trình (22) được thể hiện trên hình 7:

- Nếu $M=0$ thì $\sigma^* = 20,05$ và tải trọng tới hạn xác định theo (19).
- Nếu khối lượng riêng của thanh là nhỏ bỏ qua so với khối lượng tập trung tại đầu tự do M thì giá trị của tham số tải trọng tới hạn σ^* là nghiệm phương trình $\text{tg} \sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma}$, suy ra $\sigma^* = 20,19$ hay là

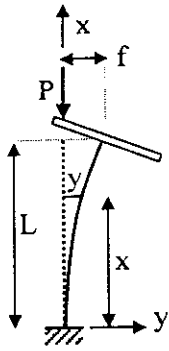
$$P_{th} = 20,19 \frac{EI}{L^2} \quad (23)$$

3.4. Thanh chịu nén bởi lực có đường tác dụng không đổi

Đối với bài toán lực có đường tác dụng không đổi đặt tại nút 2 ($x=L$), mômen tại nút 2 được biểu diễn dưới dạng

$$\bar{Q}_3 e^{i\omega t} = Q_3 e^{i\omega t}$$

$$\bar{M}_3 e^{i\omega t} = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = M_3 e^{i\omega t} + P \cdot y(L, t) = M_3 e^{i\omega t} + P \cdot N(L, \omega) \{u\} e^{i\omega t} \quad (24)$$



Hình 8.

Xem thanh là một phần tử (hình 8), khử dạng suy biến của MTĐCĐL theo điều kiện biên tại $x=0$: $U_1 = 0$; $U_2 = 0$ và sử dụng (17), ta nhận được MTĐCĐL rút gọn có dạng

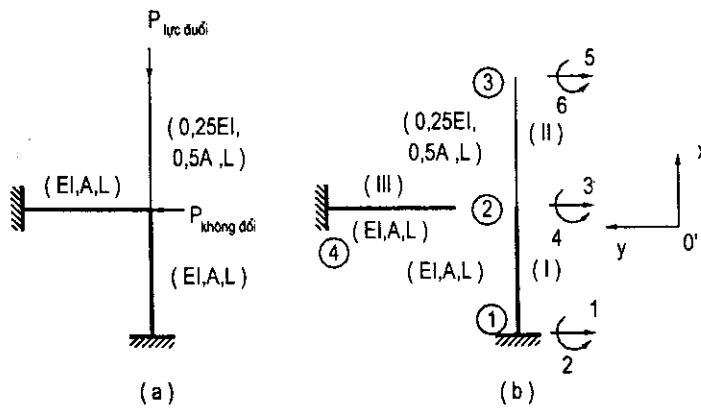
$$\bar{K}^*(\omega, P) = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & F_4 L \\ F_4 L + \frac{PL^3}{EI} & F_2 L^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Từ đó ta nhận được phương trình xác định lực tới hạn gây mất ổn định trùng với phương trình (18) và cũng trùng với nghiệm giải tích [5]. Do đó lực tới hạn của thanh chịu nén bởi lực có đường tác dụng không đổi đặt tại nút 2 có giá trị bằng với lực tới hạn của thanh chịu nén bởi lực dưới (19).

3.5. Hệ thanh chịu nén

Xét bài toán ổn định của hệ gồm 3 thanh liên kết với nhau và chịu nén bởi các lực bảo toàn và không bảo toàn như trên hình 9.a.

Tương tự như phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), ta chia hệ thanh thành 3 PTHH với MTĐCĐL của từng phần tử được thiết lập trong hệ tọa độ địa phương theo biểu thức (10) hay biểu thức (16). Các phần tử 1 và 3 có mômen quán tính chính I , môđun đàn hồi E và diện tích A . Phần tử 2 có mômen quán tính chính $0,25I$, môđun đàn hồi E và diện tích $0,5A$.



Hình 9.

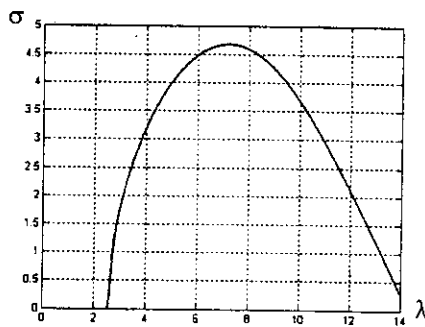
Sơ đồ và tọa độ nút của các phần tử trong hệ tọa độ chung được thể hiện như trên hình 9.b, số liệu về các phần tử được ghi trong bảng 1 dưới đây.

Bảng 1.

Phần tử	Nút i (đầu)	Nút j (cuối)	Diện tích tiết diện	Độ cứng EI_{\min}	Chiều dài	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
I	1	2	A	EI	L	1	0
II	2	3	0,5A	0,25EI	L	1	0
III	2	4	A	EI	L	0	1

Sau khi chuyển MTĐCĐL của từng PTHH trong các hệ tọa độ địa phương về hệ tọa độ chung và tiến hành lắp ghép MTĐCĐL của các phần tử trong hệ trục tọa độ chung, đồng thời khử suy biến của MTĐCĐL toàn kết cấu theo các điều kiện biên, ta nhận được ma trận độ cứng động lực rút gọn của toàn kết cấu có dạng

$$[\bar{K}^*] = 0,25 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4F_{21}L^2 + F_{22}L^2 + 4F_{21}L^2 & -F_{32}L & F_{12}L^2 \\ -F_{32}L & F_{62} & F_{42}L + 4\sigma L \\ F_{12}L^2 & F_{42}L & F_{22}L^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$



Hình 10. Đồ thị hàm số $\sigma = \sigma(\lambda)$

Tải trọng tới hạn được xác định từ phương trình ổn định

$$\det[\bar{K}^*] = 0 \quad (27)$$

Việc tính toán định thức của MTĐCĐL \bar{K}^* được thực hiện trên MatLab cho ta biểu đồ quan hệ giữa các hệ số σ và λ như trên hình 10, từ đó ta xác định được giá trị tải trọng tới hạn là

$$P_{th} = 4,666 \frac{EI}{L^2} \quad (28)$$

4. Kết luận

1. Từ các ví dụ đã được giải ở trên, ta thấy rằng: việc xác định lực tới hạn gây mất ổn định cho các hệ thanh chịu nén bởi các lực bảo toàn hay không bảo toàn theo phương pháp MTĐCĐL dẫn đến các kết quả là các phương trình đặc trưng và giá trị lực tới hạn hoàn toàn trùng với các kết quả đã biết theo phương pháp giải tích. Đây là cơ sở để có thể áp dụng phương pháp MTĐCĐL vào bài toán ổn định của các hệ thanh chịu các dạng lực bảo toàn hay không bảo toàn phức tạp hơn.

2. Trong các trường hợp phức tạp không có nghiệm giải tích, để xác định lực tới hạn thì phải dùng phương pháp MTĐCĐL.

Vận dụng tư tưởng phân chia hệ kết cấu liên tục thành các PTHH của phương pháp PTHH, việc xác định giá trị lực tới hạn cho bài toán ổn định của các hệ thanh chịu lực bảo toàn hay không bảo toàn bằng phương pháp MTĐCĐL được thực hiện theo một trình tự tương tự như khi áp dụng phương pháp PTHH. Bằng cách này, ta hoàn toàn có thể xác định lực tới hạn mất ổn định cho các hệ thanh phức tạp chịu các dạng tải trọng khác nhau là các lực bảo toàn hay không bảo toàn.

Tài liệu tham khảo

1. Trần Văn Liên (2002), *Bài toán ngược của cơ học và một số ứng dụng*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Xây dựng, Hà nội.
2. Lê Thọ Trình, Đỗ Văn Bình (2002), *Ổn định công trình*, NXB KHKT, Hà nội
3. Leung A.Y.T. (1993), *Dynamic Stiffness and Substructures*, Springer-Verlag, London.
4. Rao S.S. (1986), *Mechanical Vibrations. Second Edition*, Addison-Wesley Pub Company.
5. Болотин В.В. (1961), *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Изд. Физмат, Москва
6. Пановко Я.Г.; Губанова И.И (1979), *Устойчивость и колебания упругих систем*, Наука, Москва.