Cột vát tiết diện chữ I, liên kết ngàm đàn hồi trượt và liên kết khớp

PGS. TS **NGUYỄN QUANG VIÊN**
ThS **BÙI HÙNG CƯỜNG**
TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG

Cột vát tiết diện dạng chữ I được sử dụng khá phổ biến trong khung thép nhà tiền chế. Khả năng chịu lực của cột phụ thuộc vào độ mảnh, nghĩa là phụ thuộc vào tiết diện và liên kết ở hai đầu cột. Thông thường, chân cột liên kết khớp với móng; còn ở đầu cột thì tùy thuộc vào tương quan độ cứng giữa cột với xà ngang và số lượng nhịp của khung mà đầu cột có thể coi là liên kết khớp, liên kết ngàm hoặc liên kết ngàm đàn hồi. Ứng với từng trường hợp cụ thể để tính được lực tới hạn cần lập và giải bài toán ổn định.

Bài viết này trình bày một lời giải cho trường hợp cột có liên kết khớp ở chân và ngàm đàn hồi trượt ở đỉnh.

Theo hình 1, mômen quán tính của tiết diện dạng chữ I trong cột vát có thể được xác định bằng biểu thức gần đúng:

$$J(z) \approx J_1\left(\frac{z}{a}\right)^2 \qquad (1)$$

Phương trình vi phân đường đàn hồi khi cột bị mất ổn định có dạng:

$$EJ_1\left(\frac{z}{a}\right)^2 \frac{d^2y}{dz^2} + Py = 0 \qquad (2)$$

Có thể tìm được nghiệm của phương trình (2) dưới dạng các hàm số sơ cấp.

Đặt:

$$z = ae^t$$

Ta có:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dz} = \frac{1}{z}\cdot\frac{dy}{dt}$$

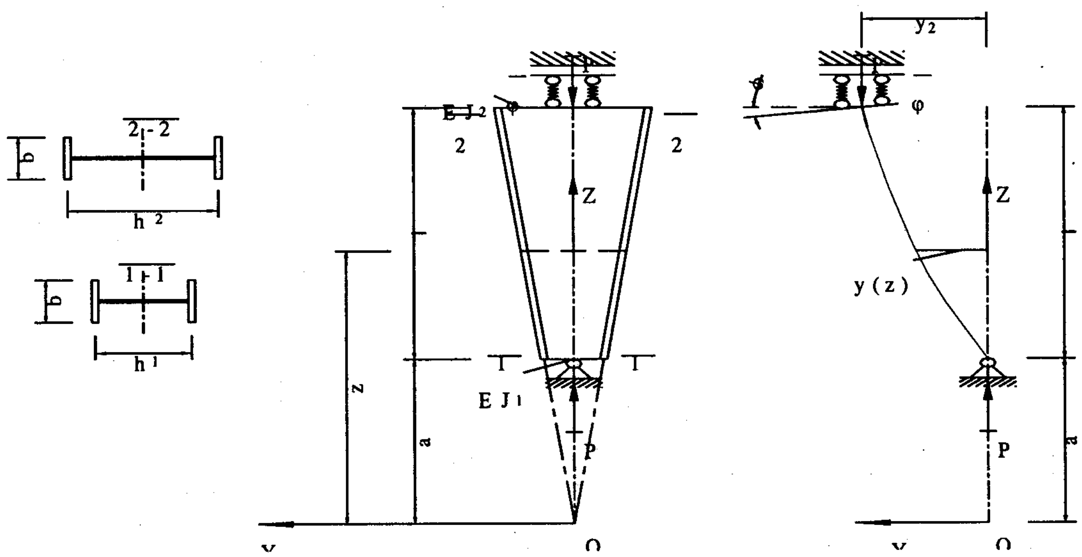
Sau khi thay vào phương trình vi phân (2), ta được phương trình vi phân thường như sau:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{Pa^2}{EJ_1}y = 0 \qquad (3)$$

Phương trình (3) có 2 nghiệm: [2]

+ Trường hợp 1:

$$y = Ae^{\left(\sqrt{\eta}+\frac{1}{2}\right)t} + Be^{\left(-\sqrt{\eta}+\frac{1}{2}\right)t} = e^{\frac{1}{2}t}\left(Ae^{\sqrt{\eta}t} + Be^{-\sqrt{\eta}t}\right)$$



Hình 1

Trong đó:

$$\eta = \frac{1}{4} - \frac{Pa^2}{EJ_1} \geq 0$$

Nếu biểu thị nghiệm theo biến số z, ta có:

$$y = \sqrt{\frac{z}{a}}\left(A\left(\frac{z}{a}\right)^{\sqrt{\eta}} + B\left(\frac{z}{a}\right)^{-\sqrt{\eta}}\right)$$

A, B: là các hằng số tích phân được xác định theo điều kiện biên.

Trường hợp nghiệm này ít có ứng dụng trong thực tế nên ta không xét kỹ.

+ Trường hợp 2:

$$y = e^{\frac{1}{2}t}(A\sin\gamma t + B\cos\gamma t)$$

Trong đó:

$$\gamma^2 = \frac{Pa^2}{EJ_1} - \frac{1}{4} > 0 \quad (4)$$

$$\rightarrow P_{th} = (\gamma^2 + \frac{1}{4})\frac{EJ_1}{a^2} \quad (5)$$

Nếu biểu thị nghiệm theo biến số z, ta có:

$$y = \sqrt{\frac{z}{a}}\left[A\sin\left(\gamma\ln\frac{z}{a}\right) + B\cos\left(\gamma\ln\frac{z}{a}\right)\right] \quad (6)$$

Trong các biểu thức trên:

A, B: là các hằng số tích phân được xác định theo điều kiện biên:

$$z = a \rightarrow y|_{z=a} = 0$$

$$z = a + l \rightarrow y|_{z=a+l} = y_2,\ y'|_{z=a+l} = \varphi$$

Trong đó:

φ - góc xoay tại ngàm đàn hồi trượt

y_2 - chuyển vị thẳng tại ngàm đàn hồi trượt

Ta có:

$$y(a) = 0 \rightarrow B = 0$$

Thay vào (6) và tính đạo hàm:

$$y = \sqrt{\frac{z}{a}}A\sin\left(\gamma\ln\frac{z}{a}\right)$$

$$y' = \frac{A\left[\sin\left(\gamma\ln\frac{z}{a}\right) + 2\gamma\cos\left(\gamma\ln\frac{z}{a}\right)\right]}{2a\sqrt{\frac{z}{a}}}$$

Theo điều kiện biên tại ngàm đàn hồi trượt:

$$y|_{z=a+l} = \sqrt{\frac{a+l}{a}}A\sin(\gamma\ln\frac{a+l}{a}) = y_2$$

$$y'|_{z=a+l} = \frac{A}{2a\sqrt{\frac{a+l}{a}}}\left[\sin\left(\gamma\ln\frac{a+l}{a}\right) + 2\gamma\cos\left(\gamma\ln\frac{a+l}{a}\right)\right] = \varphi$$

Nếu gọi $\overline{\varphi}$ là hệ số đàn hồi của liên kết (tức là góc xoay của ngàm đàn hồi do mômen bằng đơn vị gây ra); trong trường hợp này, vì mômen tại ngàm đàn hồi bằng Py_2 nên:

$$\varphi = P \times y_2 \times \overline{\varphi}$$

Vậy:

$$\frac{A}{2a\sqrt{\frac{a+l}{a}}}\left[\sin(\gamma\ln\frac{a+l}{a}) + 2\gamma\cos(\gamma\ln\frac{a+l}{a})\right] =$$

$$= P\sqrt{\frac{a+l}{a}}A\sin(\gamma\ln\frac{a+l}{a})\overline{\varphi}$$

Biến đổi, ta có:

$$\rightarrow\left[\sin(\gamma\ln\frac{a+l}{a}) + 2\gamma\cos(\gamma\ln\frac{a+l}{a})\right] =$$

$$= 2(a+l)P\sin(\gamma\ln\frac{a+l}{a})\overline{\varphi}$$

$$\rightarrow\left[1 - 2(a+l)P\overline{\varphi}\right]\sin(\gamma\ln\frac{a+l}{a}) + 2\gamma\cos(\gamma\ln\frac{a+l}{a}) = 0$$

$$\rightarrow\left[1 - 2(a+l)P\overline{\varphi}\right]tg\left(\gamma\ln\frac{a+l}{a}\right) + 2\gamma = 0 \quad (7)$$

Đặt:

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}'\frac{l}{EJ_1} \quad (8)$$

$\overline{\varphi}'$ - hệ số đàn hồi tương đối của ngàm đàn hồi trượt

Thay vào (7):

$$\left[1 - 2\frac{a+l}{a}\frac{l}{a}(\gamma^2 + \frac{1}{4})\overline{\varphi}'\right]tg(\gamma\ln\frac{a+l}{a}) + 2\gamma = 0$$

Ta có quan hệ hình học sau:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{a+l}{a}$$

Thiết lập được phương trình ổn định:

$$\left[1 - 2\frac{h_2}{h_1}(\frac{h_2}{h_1} - 1)(\gamma^2 + \frac{1}{4})\overline{\varphi}'\right]tg(\gamma\ln\frac{h_2}{h_1}) + 2\gamma = 0 \quad (9)$$

Ứng với các giá trị xác định của tỷ số $\frac{h_2}{h_1}$ và $\overline{\varphi}'$, có thể giải được phương trình (9) để tìm γ và từ đó suy ra lực tới hạn P_{th} theo (5). ■

Tài liệu tham khảo

1. *Bùi Hùng Cường. Một phương pháp gần đúng xác định mômen quán tính tiết diện của cột vát tiết diện chữ I. Tạp chí Xây dựng, số 6/2004.*

2. *Bùi Hùng Cường. Ổn định của cột có tiết diện thay đổi trong khung thép tiền chế, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Xây dựng, Hà Nội, 2003.*

3. *Y.Galea, "Flambement des poteaux à inertie variable", Construction Métallique, N°1, 1981 France.*