

# PHƯƠNG PHÁP TÍNH KẾT CẤU DÀN CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG DỌC TRỤC CỦA THANH

TH.S PHÙNG BÁ THẮNG

**Tóm tắt:** Trong bài báo này trình bày phương pháp tính dàn có xét đến biến dạng dọc trục của các thanh.

**Abstract:** In this article, the author introduces a method for calculating truss structures with consideration of axial deformation of truss's members.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Dàn là kết cấu tạo bởi các thanh mà các đầu thanh liên kết với nhau lại các nút. Liên kết tại nút được xem là khớp và trong tính toán bỏ qua trọng lượng bản thân của thanh. Hiện nay trong các phương pháp tính người ta coi độ cứng các thanh dàn là rất lớn và bỏ qua biến dạng dọc của thanh. Thực tế độ cứng của thanh dàn là hữu hạn nên cần phải xét đến biến dạng dọc của thanh trong tính toán.

## 2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH DÀN CÓ KỂ ĐẾN BIẾN DẠNG DỌC CỦA THANH

*Các giả thiết:*

- Vật liệu thanh là đàn hồi tuyến tính.
- Bỏ qua trọng lượng bản thân của thanh dàn.
- Tải trọng chỉ đặt tại các nút.
- Hệ khảo sát là hệ dàn phẳng.

*Sơ đồ tính:*

Các thanh dàn được biểu thị bằng các đường trục và nút dàn là điểm giao nhau của các trục.

Vì nút dàn được xem là khớp, tải trọng chỉ đặt tại nút dàn nên các thanh chỉ chịu kéo nén. Khi chịu tải do độ cứng của thanh dàn là hữu hạn và các thanh bị dãn dài hoặc co lại làm cho các nút dàn bị dịch chuyển.

Với sơ đồ tính thiết lập theo nguyên tắc trên, ta khảo sát hệ trong hệ tọa độ Đề các  $xOy$ . Trong hệ tọa độ vuông góc  $(xOy)$ , ký hiệu  $(x_{0i}, y_{0i})$  và  $(x_{0j}, y_{0j})$  tương ứng là tọa độ của nút  $i$  và nút  $j$  của thanh dàn  $ij$  trước khi chuyển vị;  $(x_i, y_i)$  và  $(x_j, y_j)$  tương ứng là tọa độ nút

và nút  $j$  của thanh dàn  $ij$  sau khi chuyển vị.

Khi đó chiều dài của thanh  $ij$  trước và sau khi biến dạng  $S_{0ij}$  và  $S_{ij}$  được xác định như sau:

$$S_{0ij} = \sqrt{(x_{0j} - x_{0i})^2 + (y_{0j} - y_{0i})^2} ;$$

$$S_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (1)$$

Biến dạng và nội lực trong thanh  $ij$  sẽ là:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{S_{ij} - S_{0ij}}{S_{0ij}} ; \quad (2)$$

Theo nguyên lý cực trị Gauss của GS.TSKH Hà Huy Cương ta viết được lượng cưỡng bức của bài toán như sau:

$$Z = \sum_{ij} N_{ij} \varepsilon_{ij} S_{0ij} - \sum_i P_i v_i - \sum_j Q_j u_j \rightarrow \min \quad (3)$$

Trong đó  $P_i, Q_j$  là lực tập trung thẳng đứng và nằm ngang tác dụng tại nút  $i, j$ ;  $N_{ij}$  là lực dọc trong thanh  $ij$ ;  $v_i, u_j$  là các chuyển vị đứng và ngang tại nút  $i, j$ .

Ở đây cần xem các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  là độc lập đối với các nội lực  $N_{ij}$ , các chuyển vị  $u_i, v_j$  độc lập với các lực tác dụng  $P_i, Q_j$ .

Khi coi ẩn là các chuyển vị nút thì điều kiện cực trị của phiếm hàm  $Z$  là các đạo hàm riêng của  $Z$  theo các chuyển vị bằng không. Khi đó ta sẽ nhận được hệ phương trình đại số phi tuyến. Hệ phương trình này được giải gần đúng bằng phương pháp lặp và kết quả ta sẽ nhận được các chuyển vị nút. Sau khi có được chuyển vị nút, từ (2) tìm được các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  của thanh  $ij$ , và nội lực trong thanh  $ij$  được xác định theo quan hệ sau:

$$N_{ij} = EA_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (4)$$

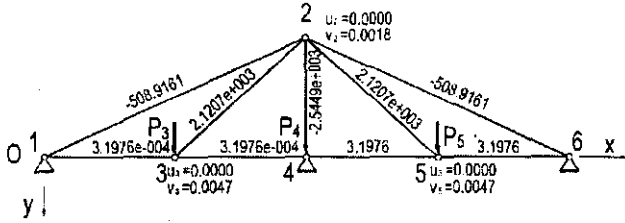
Thuật toán trên được minh họa trong các ví dụ trình bày sau đây.

Mặt khác từ (2) ta thấy rằng các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  là các hàm của các chuyển vị nút cho nên lấy đạo hàm của  $Z$  theo các chuyển vị này ta sẽ nhận được đủ và đúng các phương trình cân bằng lực tại các nút. Cách làm này không thể hiện chi tiết ở đây.

**3. CÁC VÍ DỤ**

Dưới đây ví dụ 1 và ví dụ 2 ta xét bài toán tính đàn có xét đến biến dạng dọc của thanh. Trong ví dụ 3 và ví dụ 4 ta khảo sát sự thay đổi chuyển vị đứng của các nút biên dưới khi cho độ cứng của các thanh biên dưới thay đổi.

*Ví dụ 1:* Tính đàn trình bày ở trên hình 1, các thanh đàn có độ cứng kéo nén giống nhau  $EA = 7.200.000KN$ , chiều cao dàn  $h = 5m$ , chiều dài nhịp  $l = 20m$ , chịu các tải trọng thẳng đứng  $P_3 = P_4 = P_5 = 1500KN$ .



Hình 1

Các nút 2, 3, 4, 5 có các chuyển vị là  $u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4, u_5, v_5$ . Bài toán có 8 ẩn. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có tọa độ của các điểm trước và sau khi biến dạng là:

$1(0,0); 2(10,-5); 3(5,0); 4(10,0); 5(15,0); 6(20,0).$

$1'(0,0); 2'(10+u_2,-5+v_2); 3'(5+u_3,v_3);$

$4'(10+u_4,v_4); 5'(15+u_5,v_5); 6'(20,0).$

Chiều dài các thanh trước biến dạng là:

$S_{012} = \sqrt{(l/2)^2 + h^2};$

$S_{023} = \sqrt{(l/4)^2 + h^2};$

$S_{024} = h;$

$S_{025} = \sqrt{(l/4)^2 + h^2};$

$S_{026} = \sqrt{(l/2)^2 + h^2};$

$S_{013} = l/4;$

$S_{034} = l/4;$

$S_{045} = l/4;$

$S_{056} = l/4;$

Chiều dài các thanh sau biến dạng là:

$S_{12} = \sqrt{(10+u_2-0)^2 + (-5+v_2-0)^2};$

$S_{23} = \sqrt{(5+u_3-10-u_2)^2 + (v_3+5-v_2)^2};$

$S_{24} = \sqrt{(10+u_4-10-u_2)^2 + (v_4+5-v_2)^2};$

$S_{25} = \sqrt{(15+u_5-10-u_2)^2 + (v_5+5-v_2)^2};$

$S_{26} = \sqrt{(20-10-u_2)^2 + (0+5-v_2)^2};$

$S_{13} = \sqrt{(5+u_3-0)^2 + (v_3-0)^2};$

$S_{34} = \sqrt{(10+u_4-5-u_3)^2 + (v_4-v_3)^2};$

$S_{45} = \sqrt{(15+u_5-10-u_4)^2 + (v_5-v_4)^2};$

$S_{56} = \sqrt{(20-15-u_5)^2 + (0-v_5)^2};$

Biết chiều dài các thanh trước và sau khi biến dạng, áp dụng công thức (2) sẽ tính được biến dạng trong thanh  $\epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{24}, \epsilon_{25}, \epsilon_{26}, \epsilon_{13}, \epsilon_{34}, \epsilon_{45}, \epsilon_{56}$  và nội lực  $N_{12}, N_{23}, N_{24}, N_{25}, N_{26}, N_{13}, N_{34}, N_{45}, N_{56}$  được xác định theo công thức (4):

$N_{ij} = E.A_{ij} \cdot \epsilon_{ij} \tag{4}$

Viết lượng cưỡng bức Z:

$Z = N_{12}\epsilon_{12}S_{12} + N_{23}\epsilon_{23}S_{23} + N_{24}\epsilon_{24}S_{24} + N_{25}\epsilon_{25}S_{25} + N_{26}\epsilon_{26}S_{26} + N_{13}\epsilon_{13}S_{13} + N_{34}\epsilon_{34}S_{34} + N_{45}\epsilon_{45}S_{45} + N_{56}\epsilon_{56}S_{56} - 2P_3u_3 - 2P_4u_4 - 2P_5u_5 \rightarrow \min$

Thay các biểu thức đã tìm được của biến dạng và nội lực vào ta tìm được:

$$Z = \frac{2EA_{12} \left( \frac{1}{2} \sqrt{(l^2 + 4lu_2 + 4u_2^2 + 4h^2 - 8hv_2 + 4v_2^2)} - \frac{1}{2} \sqrt{(4h^2 + l^2)} \right)^2}{\sqrt{4h^2 + l^2}} + \frac{4EA_{23} \left( \frac{1}{4} \sqrt{l^2 - 8lu_3 + 8lu_4 + 16u_3^2 - 32u_3u_4 + 16u_4^2 + 16h^2 - 32hv_3 + 32hv_4 + 16v_3^2 - 32v_3v_4 + 16v_4^2} - \frac{1}{4} \sqrt{16h^2 + l^2} \right)^2}{\sqrt{16h^2 + l^2}} + \frac{EA_{24} \left( \sqrt{u_2^2 - 2u_2u_4 + u_4^2 + h^2 - 2hv_2 + 2hv_4 + v_2^2 - 2v_2v_4 + v_4^2} - h \right)^2}{h} + \frac{4EA_{25} \left( \frac{1}{4} \sqrt{l^2 - 8lu_5 + 8lu_4 + 16u_5^2 - 32u_5u_4 + 16u_4^2 + 16h^2 - 32hv_5 + 32hv_4 + 16v_5^2 - 32v_5v_4 + 16v_4^2} - \frac{1}{4} \sqrt{16h^2 + l^2} \right)^2}{\sqrt{16h^2 + l^2}} + \frac{2EA_{26} \left( \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - 4lu_2 + 4u_2^2 + 4h^2 - 8hv_2 + 4v_2^2} - \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + l^2} \right)^2}{\sqrt{4h^2 + l^2}} + \frac{4EA_{13} \left( \frac{1}{4} \sqrt{l^2 + 8lu_3 + 16u_3^2 + 16v_3^2} - \frac{1}{4} l \right)^2}{l} + \frac{4EA_{34} \left( \frac{1}{4} \sqrt{l^2 + 8lu_4 - 8lu_3 + 16u_4^2 - 32u_4u_3 + 16u_3^2 + 16v_4^2 - 32v_4v_3 + 16v_3^2} - \frac{1}{4} l \right)^2}{l} + \frac{4EA_{45} \left( \frac{1}{4} \sqrt{l^2 + 8lu_5 + 16u_5^2 + 16v_5^2} - \frac{1}{4} l \right)^2}{l} - 2P_3v_3 - 2P_4v_4 - 2P_5v_5$$

Điều kiện cực trị là:

$\frac{\partial Z}{\partial u_2} = 0; \frac{\partial Z}{\partial v_2} = 0; \frac{\partial Z}{\partial u_3} = 0; \frac{\partial Z}{\partial v_3} = 0;$

$$\frac{\partial Z}{\partial u_2} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial v_2} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial u_2} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial v_2} = 0$$

Từ điều kiện cực tiểu ta nhận được 8 phương trình để xác định các chuyển vị nút (không viết ở đây). Các phương trình trên là các phương trình đại số phi tuyến, để tìm nghiệm của chúng thường dùng các phương pháp giải số đúng dần (lặp). Ở đây dùng phần mềm MatLab để giải. Giải hệ phương trình ta tìm được các nghiệm:

$$u_2 = -0.0000; \quad v_2 = 0.0175;$$

$$u_3 = 0.0005; \quad v_3 = 0.0210;$$

$$u_4 = 0.0000; \quad v_4 = 0.0186;$$

$$u_5 = -0.0005; \quad v_5 = 0.0210.$$

Dựa vào (2) tính được nội lực trong các thanh:

$$N_{12} = -5.0380e + 003; \quad N_{23} = 2.1164e + 003;$$

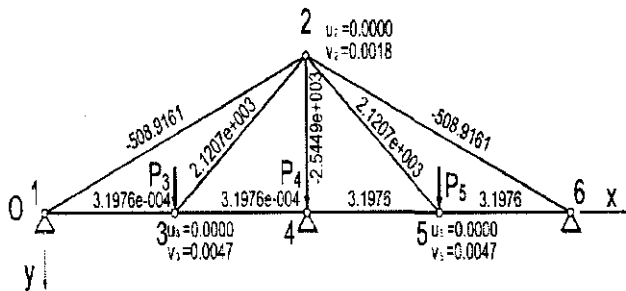
$$N_{24} = 1.4993e + 003; \quad N_{25} = 2.1164e + 003;$$

$$N_{26} = -5.0380e + 003; \quad N_{13} = 779.9748;$$

$$N_{34} = -715.9297; \quad N_{45} = -715.9297;$$

$$N_{56} = 779.9748$$

Kết quả được trình bày trên Hình 2, lực dọc trục được viết theo chiều trục thanh, đơn vị lực là KN, đơn vị chuyển vị là m.



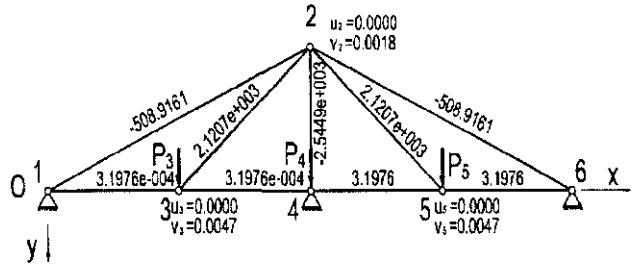
Hình 2

Để thấy rằng bài toán là đối xứng và kết quả tìm được cũng như vậy.

**Ví dụ 2:**

Làm lại ví dụ 1. Điều kiện bài toán chỉ khác là ta cho độ cứng kéo nén của tất cả các thanh rất lớn  $EA = 10000 \cdot 72000000 \text{ KN}$ .

Vẫn cách làm tương tự như trên ta được kết quả thể hiện trên Hình 3.



Hình 3

Kết quả trên xấp xỉ với kết quả của tính khi không xét đến biến dạng dọc trục của thanh theo các phương pháp thông thường.

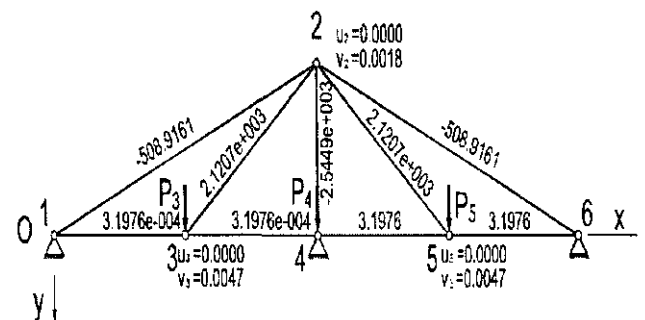
**Ví dụ 3:**

Trong cầu dây văng, biên dưới là dầm cứng chịu uốn và khi tính toán ta không xét đến chuyển vị ngang, chỉ có chuyển vị thẳng đứng và các dây làm việc tương tự như thanh dầm.

Xét sơ đồ dàn tương tự như cầu dây văng đơn giản (Hình 4). Trong ví dụ ta cho các chuyển vị ngang của các nút 3, 4, 5 bằng không ( $u_3 = u_4 = u_5 = 0$ ). Các đặc trưng hình học và độ cứng của hệ như ví dụ 1.

Trong dàn có thanh xiên có thể chịu nén, nhưng đối với cầu dây văng các dây không chịu nén do đó các dây được căng trước.

Kết quả được trình bày trên Hình 4.

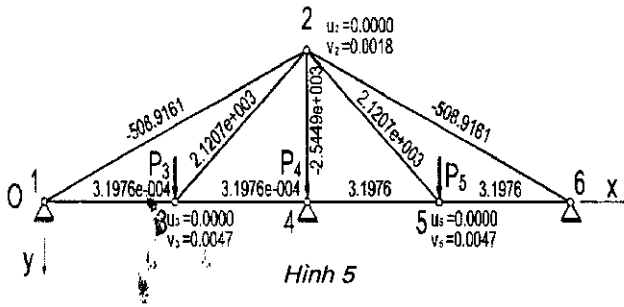


Hình 4

**Ví dụ 4:**

Làm lại ví dụ 3 trên nhưng cho các độ cứng của các thanh biên dưới 1 - 3, 3 - 4, 4 - 5, 5 - 6 rất nhỏ ( $EA_{13} = EA_{34} = EA_{45} = EA_{56} = EA/10000$ ).

Kết quả được trình bày trên Hình 5.



Hình 5

Như vậy qua kết quả tính của ví dụ 3 và 4 thấy rằng với điều kiện nút 3, 4, 5 không có chuyển vị ngang thì các chuyển vị đứng hầu như không thay đổi khi độ cứng của các thanh biên dưới thay đổi. Nhận xét này cho thấy phương pháp tính cầu dây văng hiện nay không xét đến chuyển vị ngang của dầm cứng là hợp lý. Tuy nhiên ở đây cần phải kiểm tra ổn định dọc của dầm cứng.

#### 4. KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày một phương pháp tính kết cấu dàn có xét đến biến dạng dọc trục của thanh. Kết quả

tính bằng ví dụ số chứng tỏ độ tin cậy và chính xác của phương pháp, đồng thời kết quả thử nghiệm số cũng chỉ ra rằng khi không xét đến chuyển vị ngang của các thanh biên dưới của hệ dàn tam giác thì độ cứng của các thanh này không ảnh hưởng đến chuyển vị đứng của nút dàn.

Hệ dây là hệ phi tuyến hình học có đặc điểm là các dây chỉ chịu kéo và biến dạng dọc lớn nên có thể áp dụng phương pháp đã trình bày trong bài báo để tính toán □

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Trần Thị Kim Huế*. Luận án thạc sỹ kỹ thuật. Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội - 2005.
2. *Phạm Văn Trung*. Luận án tiến sỹ kỹ thuật. Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội - 2006.

## GỬI THỌ CẦU XUÂN SƠN

*Trịnh Ngọc Dự*

*Với đồng đội tôi ở Đội cầu 10 Anh hùng*

*Ba mươi năm chưa trở lại  
 Một buổi chiều già biệt bên Xuân Sơn  
 Bom chưa ngọt con đường qua Lèn Bạc  
 Phía người đi dốc ngược, đường trơn....*

*Đâu mỏ đá bên đường em vẫy vẫy?  
 Bao người về, con đường đứng chờ vơ\*  
 Như chưa có một thời đan lừ  
 B.52 toạ độ từng giờ*

*Vườn nhón nhón bom bi như ổi rụng  
 Bom nghìn cân rình rập dưới tầng sâu*

*Cầu ta dựng từ giữa lòng đất mẹ  
 Nhịp vươu dài qua năm tháng gian lao*

*Anh ngã xuống trên dòng sông sóng vỗ  
 Tiếng búa còn vang trong nhịp hát bây giờ  
 Đường Quyết Thắng, bìa rừng em nằm lại  
 Hoa mua chiều tím sẫm lối Phong Nha*

*Người về hôm nay không phải người ngày ấy,  
 Đất nước dòng sông nuôi lớn lớp anh hùng  
 Cầu lại mọc nơi con phà đứng đợi  
 Đây, bắt đầu của dãy Trường Sơn.*

\* Ý một câu thơ *Phạm Tiên Duật*