

# THIẾT KẾ TỐI ƯU DẦM THÉP TỔ HỢP CHỮ I TRONG KẾT CẤU CẦU LIÊN HỢP NHỊP ĐƠN GIẢN THEO TCVN 11823:2017

Trương Việt Hùng<sup>a</sup>, Hà Mạnh Hùng<sup>b,\*</sup>, Đinh Văn Thuật<sup>b</sup>, Hoàng Văn Phúc<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Khoa Công trình, Trường Đại học Thủy Lợi, 175 đường Tây Sơn, quận Đống Đa, Hà Nội, Việt Nam

<sup>b</sup>Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng, 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 12/05/2021, Sửa xong 27/06/2021, Chấp nhận đăng 29/06/2021

## Tóm tắt

Bài báo trình bày bài toán thiết kế tối ưu cho dầm thép tổ hợp dạng chữ I trong kết cấu cầu liên hợp nhịp đơn giản dựa theo các quy định trong TCVN 11823:2017. Hàm mục tiêu được sử dụng là tối thiểu hóa khối lượng của dầm thép và điều kiện ràng buộc gồm các quy định về cấu tạo, khả năng chịu lực, ứng suất và biến dạng được quy định trong TCVN 11823:2017. Biến thiết kế bao gồm các kích thước tiết diện của dầm thép tổ hợp chữ I. Để giải bài toán tối ưu được đề xuất, thuật toán tiến hóa vi phân được sử dụng. Bài toán đề xuất được đánh giá thông qua việc phân tích tối ưu dầm thép chữ I trong kết cấu cầu liên hợp đơn giản nhịp 33 m và 50 m. Kết quả tính toán cho thấy chương trình được xây dựng bảo đảm được độ chính xác. Bên cạnh đó, việc áp dụng thuật toán tối ưu trong thiết kế cho phép tiết kiệm chỉ còn khoảng 65% đến 75% khối lượng dầm thép được thiết kế theo kinh nghiệm.

*Từ khóa:* dầm thép tổ hợp; tối ưu; cầu liên hợp; TCVN 11823:2017; tiến hóa vi phân.

OPTIMIZATION OF I-SHAPED STEEL PLATE GIRDER IN SIMPLE-SPAN COMPOSITE BRIDGES ACCORDING TO TCVN 11823:2017

## Abstract

The paper presents the optimal design of I-shaped steel plate girder in simple-span composite bridges based on the design standard TCVN 11823:2017. The objective function is to minimize the total weight of the steel girder and the constraints include the structural, load-bearing, stress, and deformation requirements specified in the design standard. Design variables are the dimensions of the steel girder section. To solve the proposed optimization problem, the differential evolution algorithm is employed. The accuracy and efficiency of the optimization problem are evaluated through the optimization of the 33 m and 50 m simple-span girders. Calculation results show that the developed program is accurate compared to manual calculation. In addition, the application of the optimization approach allows designing the steel beam with the weight of only 65% to 75% compared with the design according to experience.

*Keywords:* steel plate girder; optimization; composite bridge; TCVN 11823:2017; differential evolution.

[https://doi.org/10.31814/stce.nuce2021-15\(3V\)-05](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2021-15(3V)-05) © 2021 Trường Đại học Xây dựng (NUCE)

## 1. Giới thiệu

Cầu dầm thép thường được sử dụng khi khẩu độ nhịp cầu không lớn và được dùng để làm cầu nổi đường cao tốc cũng như cầu vượt trong đô thị. Trong trường hợp này, dầm chính của cầu thường có tiết diện hình dạng chữ I và được tổ hợp từ các bản thép. Bản mặt cầu được làm bằng bê tông cốt

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [hunghm@nuce.edu.vn](mailto:hunghm@nuce.edu.vn) (Hùng, H. M.)

thép (BTCT) và đặt ở trên dầm thép. Bản BTCT và dầm thép được liên kết với nhau bằng các chốt liên kết để cùng chịu lực. Với tiết diện liên hợp như vậy, khả năng chịu lực cũng như khả năng chống mất ổn định của dầm thép được nâng cao đáng kể. Phương pháp thiết kế dầm thép tổ hợp được sử dụng hiện nay vẫn theo cách truyền thống, cụ thể là: trước tiên tiến hành lựa chọn phương án thiết kế và kích thước tiết diện của dầm thép theo kinh nghiệm của người thiết kế cũng như theo các tài liệu tham khảo; tiếp theo, tiến hành xác định tải trọng tác dụng và phân tích nội lực trong dầm. Kết quả thiết kế dầm được quyết định từ kết quả tính toán kiểm tra việc lựa chọn tiết diện đó có bảo đảm đạt hay không đạt các yêu cầu thiết kế. Khái niệm đạt ở đây được xét dưới hai khía cạnh, một là phải bảo đảm an toàn về yêu cầu chịu lực và chuyển vị được quy định trong tiêu chuẩn thiết kế, hai là phải bảo đảm được yêu cầu về độ bền chịu uốn và chịu cắt không được dư thừa quá nhiều. Nếu kết quả kiểm tra không đạt, có nghĩa là cần tiếp tục tiến hành lựa chọn lại kích thước tiết diện dầm thép và tính toán kiểm tra, cứ như vậy cho đến khi thấy đạt. Như vậy, có thể thấy rằng phương pháp thiết kế dầm thép theo cách truyền thống dựa vào kinh nghiệm thường cho kích thước tiết diện dầm chưa phải là trường hợp đạt được hiệu quả cao nhất về mặt kinh tế, đồng thời phương pháp truyền thống cũng tiêu tốn nhiều thời gian, công sức của người thiết kế.

Hiện nay, với sự phát triển mạnh mẽ về kỹ thuật tính toán cũng như phần cứng và phần mềm máy tính, nhiều thuật toán mới đã được đề xuất nhằm hỗ trợ hiệu quả cho quá trình tính toán thiết kế kết cấu công trình. Một trong số đó có thể kể đến là thuật toán tối ưu chuyên được sử dụng để tìm kiếm các giải pháp tối ưu trong thiết kế công trình. Một ưu điểm vượt trội của bài toán thiết kế tối ưu so với phương pháp thiết kế thông thường là nó có thể tối thiểu hóa chi phí trong khi các điều kiện và yêu cầu thiết kế vẫn được bảo đảm. Trong các bài toán tối ưu về thiết kế, tổng khối lượng hoặc tổng giá thành của kết cấu thường được chọn là hàm mục tiêu, trong khi các biến thiết kế là các kích thước tiết diện của các cấu kiện. Các điều kiện ràng buộc của bài toán này là các yêu cầu khác nhau về chịu lực, sử dụng, cấu tạo, xây dựng, ... Như vậy, việc thiết kế dầm thép tổ hợp có thể sử dụng thuật toán tối ưu nhằm tìm ra được phương án thiết kế tốt nhất, có hiệu quả cao nhất. Cần lưu ý rằng, bài toán tối ưu kết cấu thép nói chung và dầm thép tổ hợp nói riêng thường có tính phi tuyến cao do các nguyên nhân sau: (1) do tính phi tuyến liên quan đến vật liệu cũng như tính ổn định của cấu kiện kết cấu và (2) do tính rời rạc của các biến thiết kế là các kích thước tiết diện được lựa chọn từ một tập các giá trị cho trước chứ không phải là liên tục. Do vậy, các thuật toán mê-ta hơ-rít-tíc thường được sử dụng do có ưu điểm trong việc cân bằng giữa việc tìm kiếm kết quả tối ưu địa phương và tối ưu toàn cục. Một số thuật toán mê-ta hơ-rít-tíc có thể kể đến như sau: tìm kiếm hài hòa (harmony search - HS) [1], thuật toán di truyền (genetic algorithm - GA) [2, 3], tiến hóa vi phân (differential evolution - DE) [4–7], mô phỏng luyện kim (simulated annealing - SA) [8] v.v...

Một số nghiên cứu nổi bật về tối ưu thiết kế kết cấu công trình cầu có thể kể đến như sau. Long và cs. [9] đã xây dựng chương trình phân tích phi tuyến nhằm tối ưu thiết kế cầu dây văng với hàm mục tiêu gồm giá thành của bê tông, thép, cốt thép và cáp. Kaveh và Massoudi [10] xây dựng chương trình tối ưu hệ thống sàn liên hợp dựa trên thuật toán tối ưu đàn kiến (ant colony) theo tiêu chuẩn AISC. Poitras và cs. [11] sử dụng thuật toán tối ưu bầy đàn (particle swarm optimization - PSO) để thiết kế hệ thống bản sàn bằng BTCT. Hendawi và Frangopol [12] đã xây dựng thuật toán tối ưu dựa trên độ tin cậy để thiết kế hệ dầm thép liên hợp có hoặc không xét đến sườn tăng cường cho cầu đường ô tô. Luo và cs. [13] cũng trình bày thuật toán tối ưu dựa trên độ tin cậy để tối ưu dầm thép tổ hợp có xét đến ảnh hưởng của sự liên kết giữa dầm thép và bản BTCT. Kaveh và cs. [14] tối ưu kết cấu công trình cầu sử dụng thuật toán va chạm giữa các vật thể (colliding bodies optimization - CBO). Pedro và cs. [15] trình bày thuật toán tối ưu hai bước để thiết kế dầm thép liên hợp dạng chữ I cho kết cấu cầu. Senouci và Al-Ansari [16] sử dụng thuật toán di truyền (GA) để tối ưu giá thành của dầm liên

hợp theo tiêu chuẩn thiết kế LRFD của AISC. Khatri và cs. [17] đã tiến hành so sánh giá thành của các thiết kế công trình cầu khác nhau sử dụng các loại thép thông thường Fe 410, thép cường độ cao Fe 590 và sự kết hợp của hai loại thép này. Kravanja và cs. [18] thực hiện so sánh thiết kế tối ưu dầm liên hợp có bản sàn bằng bê tông theo tiêu chuẩn châu Âu. Vị trí tối ưu của sườn tăng cường dọc trong dầm thép I cũng được quan tâm nghiên cứu thông qua tối đa hóa giá trị hằng số mất ổn định [19–21].

Ở Việt Nam, TCVN 11823:2017 [22] đang được sử dụng để thiết kế công trình cầu, trong đó có nhiều nội dung đã được sửa đổi so với tiêu chuẩn 22 TCN 272-05 [23]. Một số tài liệu tham khảo và hướng dẫn sử dụng tiêu chuẩn [22] đã được biên soạn [24–27], tuy nhiên đối với việc nghiên cứu sử dụng bài toán tối ưu cho dầm thép liên hợp vẫn còn rất hạn chế. Bài báo này đề xuất một bài toán thiết kế tối ưu cho dầm thép tổ hợp dạng chữ I trong kết cấu cầu liên hợp nhịp đơn giản dựa trên các quy định trong [22]. Hàm mục tiêu của bài toán tối ưu là tối thiểu hóa khối lượng của dầm thép. Các điều kiện ràng buộc bao gồm các quy định về cấu tạo, khả năng chịu lực, ứng suất và biến dạng được quy định trong [22]. Biến thiết kế là các kích thước của dầm thép tổ hợp. Thuật toán tiến hóa vi phân DE được sử dụng để giải bài toán tối ưu. Kết quả của bài toán tối ưu được đánh giá thông qua phân tích hai trường hợp dầm cầu thép liên hợp có nhịp 33 m và 50 m.

## 2. Xây dựng bài toán thiết kế tối ưu tiết diện dầm thép I trong cầu nhịp đơn giản

### 2.1. Hàm mục tiêu

Trong bài toán thiết kế tối ưu dầm thép liên hợp, phần bản BTCT thường liên quan đến số lượng dầm chính hay khoảng cách của dầm chính nên giá thành của phần này có thể coi là cố định, không thay đổi. Do đó, hàm mục tiêu chỉ là tối thiểu hóa giá thành của phần dầm thép chính. Thực tế cho thấy giá thành của dầm thép bao gồm chi phí vật liệu và chi phí gia công, chế tạo dầm. Chi phí vật liệu bao gồm chi phí cho bản thân dầm thép và cho các chi tiết liết kết liên quan như đỉnh ốc, bu lông, hàn, chốt liên kết, ... Trong nghiên cứu này, chỉ chi phí về vật liệu của bản thân dầm thép được xem xét. Giả thiết rằng giá thành và khối lượng riêng của vật liệu thép sử dụng cho các bộ phận của dầm đều giống nhau. Do vậy, hàm tổng giá thành có thể được đơn giản hóa là hàm tổng thể tích của các bản thép tổ hợp của dầm như sau:

$$\min V(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n (b_{tf}^i t_{tf}^i + D^i t_w^i + b_{df}^i t_{df}^i) L^i + \sum_{j=1}^m b_{tap}^j t_{tap}^j L_{tap}^j \quad (1)$$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_{nm}) = (b_{tf}^i, t_{tf}^i, D^i, t_w^i, b_{df}^i, t_{df}^i, b_{tap}^j, t_{tap}^j), i = (1, \dots, N), j = (1, \dots, m)$$

trong đó  $V(\mathbf{X})$  là tổng thể tích của dầm;  $nm$  là tổng số biến thiết kế, có nghĩa là tổng số các loại kích thước của tiết diện dầm;  $n$  là số đoạn dầm có tiết diện khác nhau;  $m$  là số lượng bản tấp được sử dụng;  $b_{tf}^i, t_{tf}^i, D^i, t_w^i, b_{df}^i, t_{df}^i$  lần lượt là bề rộng bản cánh trên, chiều dày bản cánh trên, chiều cao bản bụng, bề dày bản bụng, bề rộng bản cánh dưới, chiều dày bản cánh dưới của đoạn dầm thứ  $i$  có chiều dài là  $L^i$ ;  $b_{tap}^j, t_{tap}^j$  là chiều rộng và chiều dày của bản tấp thứ  $j$  có chiều dài là  $L^j$ .

### 2.2. Các điều kiện ràng buộc

a. Điều kiện ràng buộc về cấu tạo

- Điều kiện ràng buộc về tỷ lệ kích thước bản bụng

+ Bản bụng không có sườn dọc:

$$C_{i,1}^{con} = \frac{D^i}{t_w^i} - 150 \leq 0 \quad (2a)$$

+ Bản bụng có sườn dọc:

$$C_{i,2}^{con} = \frac{D^i}{t_w^i} - 300 \leq 0 \quad (2b)$$

- Các điều kiện ràng buộc về tỷ lệ kích thước bản cánh chịu kéo và nén

$$C_{i,3}^{con} = \frac{b_{tf}^i}{2t_{tf}^i} - 12 \leq 0 \quad \text{và} \quad C_{i,4}^{con} = \frac{b_{df}^i}{2t_{df}^i} - 12 \leq 0 \quad (3a)$$

$$C_{i,5}^{con} = \frac{D}{6b_{tf}^i} - 1 \leq 0 \quad \text{và} \quad C_{i,6}^{con} = \frac{D}{6b_{df}^i} - 1 \leq 0 \quad (3b)$$

$$C_{i,7}^{con} = \frac{1,1t_w^i}{t_{tf}^i} - 1 \leq 0 \quad \text{và} \quad C_{i,8}^{con} = \frac{1,1t_w^i}{t_{df}^i} - 1 \leq 0 \quad (3c)$$

$$C_{i,9}^{con} = 0,1 - \frac{I_{yc}^i}{I_{yt}^i} \leq 0 \quad \text{và} \quad C_{i,10}^{con} = \frac{I_{yc}^i}{I_{yt}^i} - 1,0 \leq 0 \quad (3d)$$

trong đó  $I_{yc}$  và  $I_{yt}$  là mô men quán tính của bản cánh chịu nén và chịu kéo đối với trục thẳng đứng qua bản bụng.

b. Điều kiện ràng buộc về cường độ

Điều kiện ràng buộc về cường độ là các yêu cầu thiết kế tối ưu phải thỏa mãn về khả năng chịu lực tương ứng với các trường hợp tổ hợp tải trọng ở trạng thái giới hạn (TTGH) về cường độ. Công thức tổng quát cho điều kiện này như sau:

$$C_j^{str} = 1 - \frac{R_j}{S_j} \leq 0 \quad (4)$$

trong đó  $R_j$  và  $S_j$  tương ứng là khả năng chịu lực của tiết diện và nội lực do tổ hợp tải trọng cường độ thứ  $j$  gây ra. Các giá trị  $R_j$  và  $S_j$  được xác định như sau:

- Đối với điều kiện về khả năng chịu uốn

+ Với tiết diện đặc chắc: công thức kiểm tra điều kiện chịu uốn là  $M_u + \frac{1}{3}f_{\lambda}S_{xt} \leq \Phi_f M_n$ , do đó

$$R_j = \Phi_f M_n \quad \text{và} \quad S_j = M_u + \frac{1}{3}f_{\lambda}S_{xt}.$$

+ Với tiết diện không chắc và tiết diện mảnh: công thức kiểm tra chung điều kiện chịu uốn cho cả hai bản cánh chịu kéo và nén là:  $f_{bu} + \frac{1}{3}f_{\lambda} \leq \phi_f F_n$ , do đó  $R_j = \phi_f F_n^j$  và  $S_j = f_{bu}^j + \frac{1}{3}f_{\lambda}^j$ .

- Đối với điều kiện về khả năng chịu cắt: công thức kiểm tra chung là:  $V_u \leq \phi_v V_n$ , do đó  $R_j = \phi_v V_n^j$  và  $S_j = V_u^j$ .

c. Điều kiện ràng buộc về sử dụng

Tương tự như trên, điều kiện ràng buộc về sử dụng là các yêu cầu thiết kế tối ưu phải thỏa mãn các điều kiện tiêu chuẩn đặt ra tương ứng với các tổ hợp tải trọng ở các TTGH sử dụng. Công thức tổng quát cho điều kiện này là:

$$C_k^{ser} = 1 - \frac{R_k}{S_k} \leq 0 \quad (5)$$

trong đó  $R_k$  và  $S_k$  tương ứng là khả năng của tiết diện và nội lực/biến dạng do tổ hợp tải trọng sử dụng thứ  $k$  gây ra. Các giá trị  $R_k$  và  $S_k$  được xác định như sau:

- Đối với điều kiện về độ võng dài hạn cho tiết diện liên hợp

+ Công thức kiểm tra cho bản cánh trên là  $f_f \leq 0,95R_h F_{yf}$ , do đó  $R_k = f_f^k$  và  $S_k = 0,95R_h F_{yf}^k$ .

+ Công thức kiểm tra cho bản cánh dưới là  $f_f + \frac{f_\lambda}{2} \leq 0,95R_h F_{yf}$ , do đó  $R_k = 0,95R_h F_{yf}^k$  và

$$S_k = f_f^k + \frac{f_\lambda^k}{2}.$$

- Đối với điều kiện về độ võng do hoạt tải

Điều kiện kiểm tra là: độ võng do hoạt tải  $\leq$  độ võng giới hạn, do đó  $R_k = [\Delta_{hoat\_tai}]$  và  $S_k = \Delta_{hoat\_tai}$ , trong đó độ võng do hoạt tải được xác định như sau:

- Sử dụng tổ hợp tải trọng kể cả lực xung kích.

- Độ võng lấy giá trị lớn hơn của kết quả tính toán chỉ do một xe tải thiết kế hoặc của 25% xe tải thiết kế cùng với tải trọng làn.

- Phải áp dụng hệ số làn trong tính toán độ võng.

Độ võng giới hạn được lấy như sau: tải trọng xe nói chung là  $L/800$ ; tải trọng xe và người hoặc người đi bộ là  $L/1000$ ; tải trọng xe ở phần hẫng là  $L/300$ ; tải trọng xe và người hoặc người đi bộ ở phần hẫng là  $L/375$ .

d. Điều kiện ràng buộc về mỏi

Điều kiện ràng buộc về mỏi nhằm bảo đảm thiết kế tối ưu phải thỏa mãn các điều kiện tương ứng với các tổ hợp tải trọng ở TTGH về mỏi. Công thức tổng quát cho điều kiện này là:

$$C_l^{fat} = 1 - \frac{R_l}{S_l} \leq 0 \quad (6)$$

trong đó  $R_l$  và  $S_l$  tương ứng là khả năng chịu lực của tiết diện và nội lực/biến dạng do tổ hợp tải trọng mỗi thứ  $l$  gây ra. Các giá trị  $R_l$  và  $S_l$  được xác định như sau:

- Đối với điều kiện mỏi do tải trọng gây ra:

Chi tiết kiểm tra phải thỏa mãn điều kiện  $\gamma(\Delta F) \leq (\Delta F)_n$ , do đó  $R_l = (\Delta F)_n^l$  và  $S_l = \gamma(\Delta F)^l$ .

### 2.3. Phương pháp hàm phạt

Để giải bài toán tối ưu có điều kiện ràng buộc ở trên, chúng ta cần chuyển đổi về bài toán không có điều kiện ràng buộc bằng cách áp dụng phương pháp hàm phạt. Lúc này hàm mục tiêu được viết lại như sau:

$$V_{un}(\mathbf{X}) = V(\mathbf{X}) (1 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4) \quad (7)$$

trong đó:

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{N_{con}} \sum_{h=1}^{10} \max(C_{i,h}^{con}, 0) \quad (8a)$$

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{N_{str}} \max(C_j^{str}, 0) \quad (8b)$$

$$\beta_3 = \sum_{k=1}^{N_{ser}} \max(C_k^{ser}, 0) \quad (8c)$$

$$\beta_4 = \sum_{l=1}^{N_{fat}} \max(C_l^{fat}, 0) \quad (8d)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  và  $\alpha_4$  là các hệ số phạt tương ứng với các điều kiện về cấu tạo, cường độ, sử dụng và môi. Như đã trình bày trong công thức (7), các vi phạm điều kiện ràng buộc được thể hiện bằng cách thêm trọng số phạt vào hàm mục tiêu. Trọng số phạt được xác định bằng cách sử dụng các tham số phạt được chọn là khác không khi các ràng buộc bị vi phạm và bằng không khi các ràng buộc không bị vi phạm. Bằng cách này, cả giá trị hàm mục tiêu và giá trị các vi phạm điều kiện ràng buộc đều được giảm thiểu để tìm ra phương án thiết kế tối ưu có giá trị hàm mục tiêu nhỏ hơn mà không vi phạm điều kiện ràng buộc trong quá trình tối ưu hóa. Khi không có ràng buộc nào bị vi phạm, giá trị của hàm mục tiêu không bị ràng buộc sẽ bằng giá trị của hàm mục tiêu bị ràng buộc. Các tham số phạt thường đủ lớn để tạo ra một trọng số phạt lớn nhằm bảo đảm rằng những thiết kế không khả thi sẽ bị loại bỏ trong quá trình tối ưu hóa.

### 3. Thuật toán tiến hóa vi phân

Thuật toán tiến hóa vi phân (differential evolution - DE) được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1997 bởi Storn và Price [28]. Tại thời điểm đó, DE được xem là một trong những thuật toán mê-ta-hơ-rít-tic mạnh nhất bởi sự hiệu quả của nó trong việc giải quyết được rất nhiều dạng bài toán tối ưu với cả biến liên tục và biến rời rạc trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Các bước cơ bản của DE được tóm lược như sau:

#### 3.1. Khởi tạo

Trong bước đầu tiên, một quần thể được tạo ra ngẫu nhiên gồm NP cá thể  $\mathbf{X}_i$  ( $i = 1, \dots, NP$ ) dựa theo công thức sau:

$$x_{ij} = x_j^{lowb} + rand(0, 1)(x_j^{upb} - x_j^{lowb}), \quad i = 1, NP, \quad j = 1, D \quad (9)$$

trong đó  $D$  là số lượng biến thiết kế;  $x_{ij}$  là phần tử thứ  $j$  của  $\mathbf{X}_i$  và là một biến thiết kế liên tục trong khoảng giá trị cho trước  $[x_j^{lowb}, x_j^{upb}]$ ; và  $rand(0, 1)$  được sử dụng để tạo ra một số thực ngẫu nhiên trong đoạn  $[0, 1]$ .

#### 3.2. Đột biến

Tương ứng với mỗi cá thể  $\mathbf{X}_i$ , một cá thể đột biến  $\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_D)$  được tạo ra dựa trên các kỹ thuật đột biến. Trong nguyên bản DE, có hai kỹ thuật đột biến thông dụng được sử dụng gồm:

$$DE/rand/1 : \mathbf{V} = \mathbf{X}_{r_1} + F \times (\mathbf{X}_{r_2} - \mathbf{X}_{r_3}) \quad (10)$$

$$DE/best/1 : \mathbf{V} = \mathbf{X}_{best} + F \times (\mathbf{X}_{r_1} - \mathbf{X}_{r_2}) \quad (11)$$

trong đó  $F$  là hệ số thu/phóng;  $\mathbf{X}_{best}$  là cá thể tốt nhất trong quần thể hiện tại;  $r_1, r_2$  và  $r_3$  là các giá trị tự nhiên ngẫu nhiên trong khoảng  $[1, D]$  sao cho  $i \neq r_1 \neq r_2 \neq r_3$ . Có thể nhận thấy rằng sự khác nhau của DE/rand/1 và DE/best/1 xuất phát từ việc sử dụng cá thể cơ bản trong đột biến khác nhau ( $\mathbf{X}_{r_1}$  và  $\mathbf{X}_{best}$ ). Trong DE/rand/1, cá thể cơ bản  $\mathbf{X}_{r_1}$  được lựa chọn ngẫu nhiên trong quần thể nên kỹ thuật đột biến này có thể duy trì được khả năng tìm kiếm toàn cục và tính đa dạng của quần thể. Tuy nhiên, kỹ thuật này sẽ khiến cho quá trình tối ưu hội tụ chậm và khả năng tìm kiếm địa phương bị giảm. Ngược

lại, kỹ thuật đột biến DE/best/1 dựa trên cá thể tốt nhất của quần thể nên nó có tốc độ hội tụ nhanh hơn và khả năng tìm kiếm cục bộ tốt hơn, tuy nhiên do tốc độ hội tụ nhanh nên nó dễ bị rơi vào vùng cực trị địa phương.

Sau quá trình đột biến, các phần tử  $v_i$  ( $i = 1, \dots, D$ ) của cá thể đột biến  $\mathbf{V}$  được kiểm tra lại để bảo đảm chúng nằm trong khoảng giá trị cho phép  $[x_j^{lowb}, x_j^{upb}]$ . Phần tử nào không nằm trong khoảng giá trị này sẽ được tạo lại dựa theo công thức sau để đưa về khoảng  $[x_j^{lowb}, x_j^{upb}]$ :

$$v_j = \begin{cases} 2x_j^{upb} - v_j & \text{nếu } v_j > x_j^{upb} \\ 2x_j^{lowb} - v_j & \text{nếu } v_j < x_j^{lowb} \\ v_j & \text{trường hợp còn lại} \end{cases} \quad (12)$$

### 3.3. Lai tạo

Trong bước này, dựa trên cá thể đột biến  $\mathbf{V}$  và cá thể mục tiêu  $\mathbf{X}_i$ , một cá thể mới  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_D)$  được tạo ra bằng cách lai tạo  $\mathbf{V}$  và  $\mathbf{X}_i$  như sau:

$$u_j = \begin{cases} v_j & \text{khi } (rand(0, 1) < CR) \text{ hoặc } (j = I) \\ x_{ij} & \text{trường hợp khác} \end{cases} \quad (13)$$

trong đó  $CR$  là hệ số lai tạo được định nghĩa trước nằm trong khoảng  $[0, 1]$  và  $I$  là một số tự nhiên được lựa chọn ngẫu nhiên trong khoảng  $[1, D]$ .

### 3.4. Lựa chọn

Cuối cùng, nếu giá trị hàm mục tiêu của cá thể mới  $\mathbf{U}$  mà tốt hơn của  $\mathbf{X}_i$ , nó được lựa chọn để thay thế vị trí của  $\mathbf{X}_i$  trong quần thể mới. Ngược lại, cá thể  $\mathbf{X}_i$  sẽ được giữ lại trong quần thể mới.

## 4. Tối ưu dầm thép tổ hợp chữ I bằng thuật toán tiến hóa vi phân

Chương trình tối ưu dầm thép tổ hợp chữ I theo TCVN 11823:2017 sử dụng thuật toán DE được xây dựng với các bước chính sau:

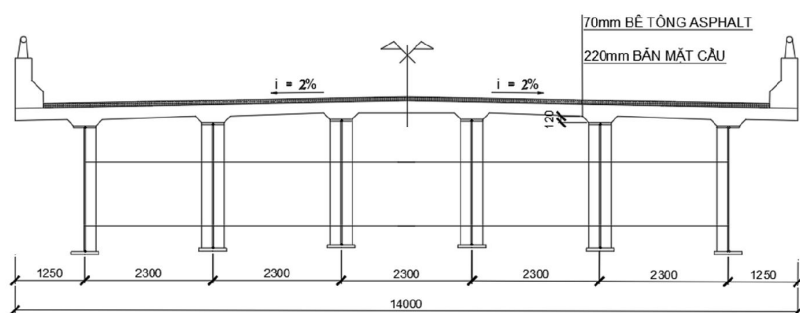
- 
- 01: Bắt đầu
  - 02: Thiết lập các thông số ban đầu cho bài toán tối ưu, thông số cho chương trình tối ưu như: F, CR, số vòng tiến hóa tối đa (*total\_iteration*), NP, D
  - 03: Tạo ngẫu nhiên NP cá thể  $\mathbf{X}_i$  ( $i = 1, \dots, NP$ ) và ghi nhớ vào ma trận DEm
  - 04: **Cho biến  $i$  chạy từ 1 đến NP**
  - 05: Xác định tải trọng tác dụng lên dầm, qua đó xác định mô men uốn và lực cắt tại các tiết diện
  - 06: Đánh giá điều kiện ràng buộc về cấu tạo, xác định mức độ vi phạm và hệ số phạt tương ứng
  - 07: Đánh giá điều kiện ràng buộc ở TTGH về cường độ, xác định mức độ vi phạm và hệ số phạt tương ứng
  - 08: Đánh giá điều kiện ràng buộc ở TTGH về sử dụng, xác định mức độ vi phạm và hệ số phạt tương ứng
  - 09: Đánh giá điều kiện ràng buộc ở TTGH về môi, xác định mức độ vi phạm và hệ số phạt tương ứng

- 10: Tính giá trị hàm mục tiêu  $V_{un}$
- 11: **Kết thúc vòng lặp**
- 12: Khi điều kiện dừng chương trình chưa thỏa mãn
- 13: **Cho  $j$  chạy từ 1 đến NP**
- 14: Áp dụng kỹ thuật đột biến để tạo ra  $\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_D)$
- 15: Áp dụng kỹ thuật lai tạo để tạo ra  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_D)$
- 16: Áp dụng kỹ thuật lựa chọn để xác định cá thể thứ  $j$  trong quần thể mới
- 17: **Kết thúc vòng lặp**
- 18: **Kết thúc vòng lặp**
- 19: **Dừng chương trình**

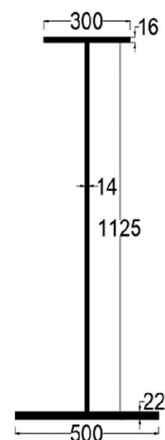
## 5. Các trường hợp nghiên cứu

### 5.1. Thiết kế tối ưu dầm thép liên hợp chữ I nhịp đơn giản dài 33 m

Trong ví dụ này, dầm cầu liên hợp một nhịp đơn giản dài 33 m được xem xét. Mặt cắt ngang cầu được thể hiện ở Hình 1(a). Chiều dài nhịp tính toán của dầm là 32 m. Dầm thép được thiết kế là ở vị trí khoảng giữa (Hình 1(a)). Bản BTCT quy đổi trong tiết diện liên hợp có bề rộng  $b_e = 2300$  mm và chiều dày  $t_s = 241,6$  mm. Vật liệu bê tông có cường độ nén tiêu chuẩn  $f'_c = 30$  (N/mm<sup>2</sup>) và cường độ chảy của vật liệu thép  $F_y = 345$  N/mm<sup>2</sup>. Mô đun đàn hồi của thép  $E = 2 \times 10^5$  N/mm<sup>2</sup>. Hệ số quy đổi giữa thép và bê tông là  $n = 8$ . Từ kết quả thiết kế theo kinh nghiệm [29], tiết diện của dầm thép được lựa chọn như ở Hình 1(b). Lưu ý rằng thiết kế theo kinh nghiệm có thể cho nhiều phương án khác nhau tùy theo người thiết kế. Do đó, việc lựa chọn kích thước tiết diện của dầm thép trong ví dụ này cũng chỉ là một trường hợp được sử dụng để so sánh về tính hiệu quả của bài toán tối ưu đặt ra.



(a) Mặt cắt ngang cầu



(b) Tiết diện dầm giữa

Hình 1. Tiết diện dầm thép của cầu nhịp 33 m được thiết kế theo kinh nghiệm

Các biến thiết kế là bề rộng bản cánh trên  $b_{tf}$ , bề dày bản cánh trên  $t_{tf}$ , bề rộng bản cánh dưới  $b_{bf}$ , bề dày bản cánh dưới  $t_{bf}$ , bề dày bản bụng  $t_w$  và chiều cao bản bụng  $D_w$ . Các khoảng giá trị tương ứng cho các biến trên là (50, 600), (5, 100), (50, 600), (5, 100), (5, 30) và (500, 3000) (mm). Các biến thiết kế được ký hiệu thành véc-tơ  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ . Hệ số phân phối tải trọng cho mô men uốn và lực cắt của dầm tương ứng bằng 0,598 và 0,793. Giá trị tính tải được chỉ ra ở Bảng 1. Do bố



qua tải trọng gió, các tổ hợp tải trọng được xem xét gồm: theo TTGH về cường độ CĐ1 (1,25 DC + 1,5 DW + 1,75 LL), theo TTGH về sử dụng SD 2 (1,0 DC + 1,0 DW + 1,3 LL) và TTGH về mỏi (1,5 LL), trong đó DC là tải trọng bản thân của kết cấu, DW là tải trọng lớp phủ và các thiết bị hỗ trợ không phải là kết cấu và LL là tải trọng hoạt tải HL-93. Có 5 tiết diện được xem xét gồm: tiết diện gối (MC1), tiết diện 1/8 nhịp (MC2), tiết diện 2/8 nhịp (MC3), tiết diện 3/8 nhịp (MC4) và tiết diện giữa nhịp (MC5).

Bảng 1. Tĩnh tải tiêu chuẩn của dầm giữa nhịp 33 m

TT	Bộ phận	Giá trị (N/mm)
1	Bản mặt cầu, vút	13,35
2	Dầm ngang, sườn tăng cường	1,75
3	Chốt liên kết, mối nối	0,2
4	Lớp phủ mặt đường	3,62

Trước tiên, tính chính xác của chương trình tối ưu được kiểm tra bằng việc xác định các kích thước tiết diện của dầm thép cho ở Hình 1(b). Kết quả tính bằng chương trình tối ưu được so sánh với kết quả tính bằng thủ công. Bảng 2 chỉ ra kết quả so sánh giá trị mô men uốn và lực cắt tính theo TTGH về khả năng chịu lực tại các tiết diện dầm. Kết quả cho thấy sự trùng khớp hoàn toàn giữa kết quả tính bằng chương trình và tính bằng thủ công. Lưu ý rằng nội lực do các tải trọng khác gây ra trong kết cấu khi tính theo chương trình tối ưu và bằng thủ công cũng hoàn toàn như nhau.

Bảng 2. So sánh mô-men uốn và lực cắt theo TTGH 1 của dầm 33 m

TT	Tiết diện	Mô-men (kNm)			Lực cắt (kN)		
		Thủ công	Chương trình	Chênh lệch	Thủ công	Chương trình	Chênh lệch
1	MC1	0,0	0,0	0,0	1135,67	1135,67	0,0
2	MC2	3340,05	3340,05	0,0	913,39	913,39	0,0
3	MC3	5682,14	5682,14	0,0	697,23	697,23	0,0
4	MC4	7026,28	7026,28	0,0	487,21	487,21	0,0
5	MC5	7471,95	7471,95	0,0	283,32	283,32	0,0

Tính chính xác của chương trình tối ưu cũng được kiểm tra bằng việc xem xét kết quả tính mô men dẻo của tiết diện liên hợp. Các kích thước tiết diện của dầm thép được lấy như ở Hình 1(b). Tuy

Bảng 3. So sánh kết quả xác định  $M_p$  của tiết diện liên hợp (đơn vị: kN, m)

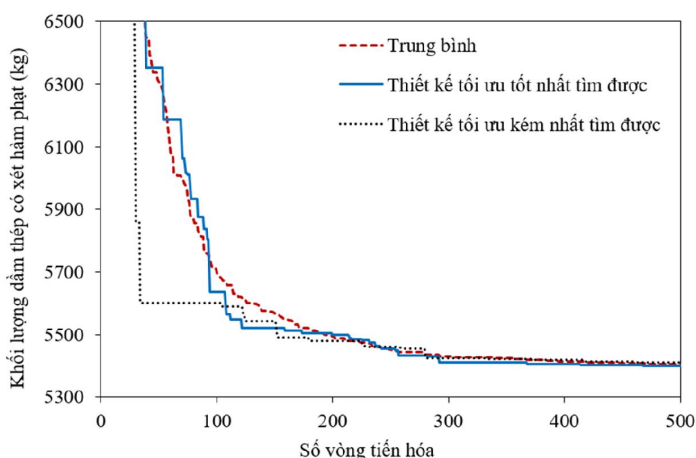
Nội dung	$t_w = 25 \text{ mm}$			$t_w = 12 \text{ mm}$			$t_w = 32 \text{ mm}$		
	Thủ công	Chương trình	Chênh	Thủ công	Chương trình	Chênh	Thủ công	Chương trình	Chênh
Vị trí TTHD	Qua bản cánh trên			Qua bản mặt cầu			Qua bản bụng		
Khoảng cách TTHD đến mép trên	0,005	0,005	0,0	0,172	0,172	0,0	0,018	0,018	0,0
Mô-men dẻo	13102,03	13102,03	0,0	9645,23	9645,23	0,0	14639,94	14639,94	0,0

nhiên, trong tính toán mô men dẻo  $M_p$ , vị trí trục trung hòa dẻo (TTHD) có thể có nhiều trường hợp nên chiều dày bản bụng  $t_w$  sẽ được thay đổi nhằm xét đến các trường hợp này. Bảng 3 so sánh kết quả tính  $M_p$  bằng chương trình tối ưu và bằng thủ công tương ứng cho nhiều trường hợp có vị trí TTHD khác nhau. Các kết quả so sánh cũng cho thấy việc tính toán bằng chương trình cũng giống như bằng thủ công.

Tiếp theo, thuật toán tiến hóa vi phân sẽ được sử dụng để thiết kế tối ưu dầm thép nhịp 33 m ở trên. Các thông số hệ thống của DE được chọn như sau: số cá thể trong quần thể  $DE_{pop} = 25$ , số vòng tiến hóa  $MaxItr = 500$ , biên độ đột biến  $F = 0,7$ , hệ số lai tạo  $CR = 0,6$ . Để giảm thiểu ảnh hưởng của tính chất ngẫu nhiên của thuật toán tối ưu đến kết quả, thuật toán sẽ được chạy độc lập 20 lần. Kết quả được trình bày ở Bảng 4. Kết quả tối ưu cho thấy khối lượng dầm thiết kế tối ưu tốt nhất tìm được là 5399 kg và kém nhất là 5410,7 kg. Trong khi đó, nếu thiết kế theo kinh nghiệm thì khối lượng của dầm là 8173,02 kg (Hình 2). Như vậy, kết quả thiết kế theo chương trình tối ưu đã tiết kiệm được trên 33,94% so với thiết kế theo kinh nghiệm. Sự chênh lệch về khối lượng của thiết kế tối ưu và thiết kế theo kinh nghiệm được giải thích dựa trên hệ số an toàn về khả năng chịu uốn của dầm. Đối với thiết kế theo kinh nghiệm, hệ số an toàn lên đến 1,23 trong khi thiết kế theo phương pháp tối ưu chỉ là 1,0006. Rõ ràng, thiết kế theo phương pháp tối ưu cho phép tối thiểu hóa được hệ số an toàn và qua đó giảm được khối lượng của dầm. Bên cạnh đó, Hình 2 thể hiện quá trình tối ưu của chương trình tương ứng với số lần chạy đạt được kết quả tối ưu tốt nhất, kém nhất và trung bình của tất cả các lần chạy.

Bảng 4. Kết quả thiết kế dầm thép nhịp 33 m

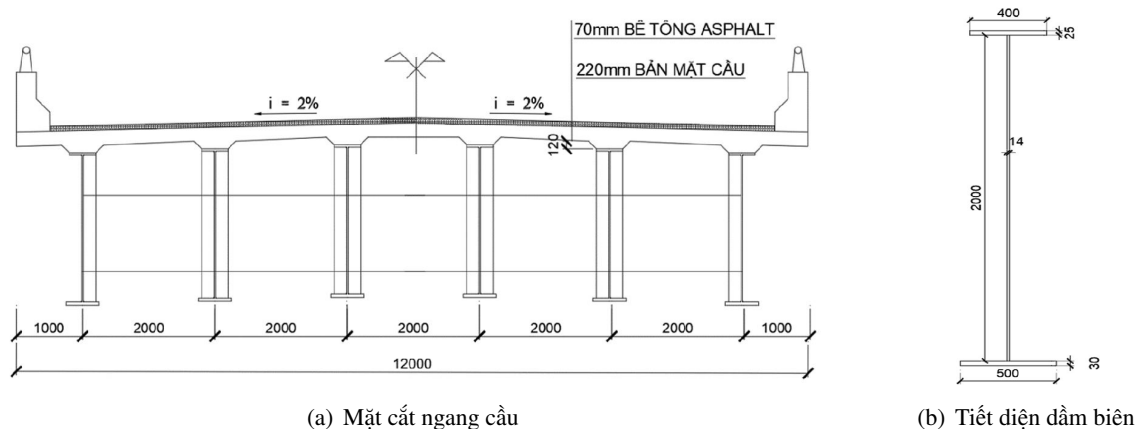
Nội dung	Bảng chương trình tối ưu	Bảng thủ công (Hình 1(b))	Tỷ lệ (%)
Khối lượng dầm tối ưu tốt nhất (kg)	5399,00	8173,02	66,06
Khối lượng dầm tối ưu kém nhất (kg)	5410,70	8173,02	66,20
Khối lượng trung bình các kết quả tối ưu (kg)	5405,61	8173,02	66,14
Độ lệch chuẩn khối lượng các kết quả tối ưu (kg)	4,07		
Kích thước tiết diện thiết kế (mm)	228,64; 10,047; 240,60; 25,173; 9,1245; 1368,60	300; 16; 500; 22; 14; 1125	
Đánh giá vi phạm các điều kiện ràng buộc	Không vi phạm	Không vi phạm	
Hệ số an toàn	1,0006	1,23	



Hình 2. Đường cong hội tụ quá trình tối ưu dầm thép 33 m

5.2. Thiết kế tối ưu dầm thép liên hợp chữ I nhíp đơn giản dài 50 m

Ví dụ thứ hai được xem xét là dầm thép liên hợp chữ I đơn giản có nhíp dài 50 m với sơ đồ mặt cắt ngang cầu được thể hiện ở Hình 3(a). Dầm thép được lựa chọn để thiết kế là ở vị trí biên. Chiều dài nhíp tính toán của dầm là 49 m. Bản BTCT quy đổi trong tiết diện liên hợp có bề rộng  $b_e = 2000$  mm và chiều dày  $t_s = 245,2$  mm. Hệ số quy đổi  $n = 8$ . Theo kết quả thiết kế theo kinh nghiệm, tiết diện dầm thép được lựa chọn như ở Hình 3(b).



Hình 3. Tiết diện dầm thép của cầu nhíp 50 m được thiết kế theo kinh nghiệm

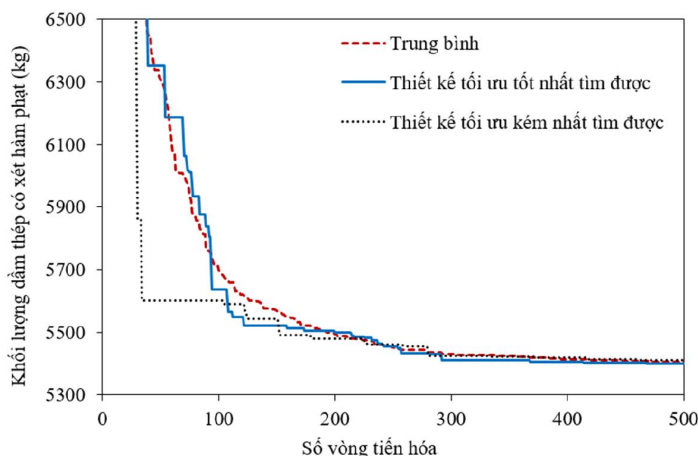
Các biến thiết kế tối ưu được xem xét vẫn là 6 biến như ở ví dụ 1, gồm các kích thước tiết diện của dầm thép với các khoảng giá trị cũng được lấy tương tự. Hệ số phân phối tải trọng cho mô men uốn và lực cắt của dầm biên tương ứng bằng 0,60 và 0,60. Giá trị tính tải được chỉ ra ở Bảng 5.

Bảng 5. Tính tải tiêu chuẩn của dầm biên nhíp 50 m

TT	Bộ phận	Giá trị (N/mm)
1	Bản mặt cầu, vút	11,77
2	Dầm ngang, sườn	0,94
3	Chốt liên kết, mối nối	0,2
4	Lan can	8,4
5	Lớp phủ mặt đường	3,375

Tương tự như ví dụ 1, trước tiên việc tính toán các giá trị đặc trưng hình học và nội lực trong dầm thép tương ứng với tiết diện dầm cho ở Hình 4 bằng chương trình tối ưu sẽ được kiểm tra thông qua việc so sánh với kết quả tính toán thủ công. Một số thông số chính được so sánh thể hiện ở Bảng 6. Kết quả cho thấy không có sự sai khác khi tính toán bằng chương trình tối ưu và bằng thủ công. Như vậy, chương trình tối ưu được sử dụng để tính toán nội lực và đặc trưng hình học của dầm là bảo đảm độ chính xác.

Tiếp theo, việc thiết kế tối ưu dầm thép được tiến hành. Các thông số hệ thống của DE vẫn được chọn tương tự như ở ví dụ 1. Thuật toán được chạy độc lập 20 lần. Kết quả được trình bày ở Bảng 7. Kết quả tối ưu cho thấy khối lượng dầm thép được thiết kế tối ưu tốt nhất tìm được là 15826 kg và kém nhất là 15829 kg. Điều này cho thấy độ chênh lệch giữa các kết quả thiết kế tối ưu tìm được là rất



Hình 4. Đường cong hội tụ quá trình tối ưu đầm thép nhịp 50 m

Bảng 6. So sánh kết quả tính nội lực và đặc trưng hình học của đầm thép nhịp 50 m (đơn vị: kN, m)

TT	Nội dung	Bảng thủ công	Bảng chương trình	Chênh
1	Mô men quán tính tiết diện đầm thép	3,455E-02	3,455E-02	0,0
2	Mô men quán tính tiết diện liên hợp dài hạn	6,294E-02	6,294E-02	0,0
3	Mô men quán tính tiết diện liên hợp ngắn hạn	8,806E-02	8,806E-02	0,0
4	Mô men chảy	14896,15	14896,15	0,0
5	Mô men dẻo	23454,95	23454,95	0,0
6	Mô men tại tiết diện giữa nhịp, CĐ 1	18073,65	18073,65	0,0
7	Lực cắt tại gối, CĐ 1	1492,28	1492,28	0,0
8	Mô men tại tiết diện giữa nhịp, SD 2	14563,04	14563,04	0,0
9	Lực cắt tại gối, SD 2	1202,02	1202,02	0,0
10	Mô-men tính mỗi tại tiết diện giữa nhịp, mỗi 2	1403,07	1403,07	0,0

ít, hay kết quả tìm được là khá hội tụ. Trong khi đó, nếu thiết kế theo kinh nghiệm như ở Hình 3(b) thì khối lượng của đầm lên đến 20802,5 kg. Như vậy, kết quả thiết kế tối ưu đã tiết kiệm được khoảng 24% so với thiết kế theo kinh nghiệm. Bên cạnh đó, Hình 4 thể hiện quá trình tối ưu của chương trình tương ứng với số lần chạy đạt được kết quả tối ưu tốt nhất, kém nhất và trung bình của tất cả các lần chạy.

Bảng 7. Kết quả thiết kế đầm thép nhịp 50 m

Nội dung	Bảng chương trình	Bảng thủ công (Hình 3(b))	Tỷ lệ (%)
Khối lượng đầm tối ưu tốt nhất (kg)	15826,00	20802,5	76,077
Khối lượng đầm tối ưu kém nhất (kg)	15829,00	20802,5	76,092
Khối lượng trung bình các kết quả tối ưu (kg)	15826,80	20802,5	76,081
Độ lệch chuẩn khối lượng các kết quả tối ưu (kg)	1,17		
Kích thước tiết diện thiết kế (mm)	332,64; 14,632; 334,12; 26,686; 13,301; 1995,10	400; 25; 500; 30; 14; 2000	
Đánh giá vi phạm các điều kiện ràng buộc	Không vi phạm	Không vi phạm	
Hệ số an toàn	1,008	1,25	

## 6. Kết luận

Một số kết quả chính đạt được từ bài báo như sau:

- Xây dựng được bài toán tối ưu về khối lượng cho dầm thép tổ hợp chữ I trong kết cấu cầu thép liên hợp nhịp đơn giản theo tiêu chuẩn TCVN 11823:2017.

- Xây dựng được phương pháp giải bài toán tối ưu đặt ra bằng cách sử dụng thuật toán tiến hóa vi phân (DE).

- Kết quả nghiên cứu cho thấy, việc áp dụng thuật toán tối ưu đã cho phép tìm được phương án thiết kế dầm thép tổ hợp chữ I có khối lượng chỉ bằng 65% đến 75% so với kết quả thiết kế theo kinh nghiệm. Bên cạnh đó, thời gian tính toán cho bài toán tối ưu cũng không đáng kể, chỉ khoảng 15 giây cho một lần chạy tối ưu.

- Chương trình tối ưu được xây dựng có thể được sử dụng như công cụ hỗ trợ hiệu quả trong việc tìm kiếm phương án thiết kế hiệu quả cho các kỹ sư thiết kế.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Truong, V. H., Kim, S.-E. (2017). [An efficient method for reliability-based design optimization of nonlinear inelastic steel space frames](#). *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 56(2):331–351.
- [2] Ha, M.-H., Vu, Q.-A., Truong, V.-H. (2018). [Optimum Design of Stay Cables of Steel Cable-stayed Bridges Using Nonlinear Inelastic Analysis and Genetic Algorithm](#). *Structures*, 16:288–302.
- [3] Truong, V.-H., Nguyen, P.-C., Kim, S.-E. (2017). [An efficient method for optimizing space steel frames with semi-rigid joints using practical advanced analysis and the micro-genetic algorithm](#). *Journal of Constructional Steel Research*, 128:416–427.
- [4] Truong, V.-H., Kim, S.-E. (2018). [Reliability-based design optimization of nonlinear inelastic trusses using improved differential evolution algorithm](#). *Advances in Engineering Software*, 121:59–74.
- [5] Truong, V.-H., Hung, H. M., Anh, P. H., Hoc, T. D. (2020). [Optimization of steel moment frames with panel-zone design using an adaptive differential evolution](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - NUCE*, 14(2):65–75.
- [6] Hùng, H. M., Hùng, T. V. (2020). [Tối ưu khung thép có liên kết nửa cứng xét đến gia cường vùng cứng nút khung panel zone](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXD*, 14(2V):64–74.
- [7] Tuấn, V. A. (2017). [Tối ưu trọng lượng khung thép nhà tiền chế sử dụng thuật toán tiến hóa vi phân](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXD*, 4(1):50–56.
- [8] Lam, X.-B. (2020). [Multidisciplinary design optimization for aircraft wing using response surface method, genetic algorithm, and simulated annealing](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - NUCE*, 14(1):28–41.
- [9] Long, W., Troitsky, M. S., Zielinski, Z. A. (1999). [Optimum design of cable-stayed bridges](#). *Structural Engineering and Mechanics: An International Journal*, 7(3):241–257.
- [10] Kaveh, A., Masoudi, M. S. (2012). [Cost optimization of a composite floor system using ant colony system](#). *International Journal of Optimization in Civil Engineering*, 36(2):139–148.
- [11] Poitras, G., Lefrançois, G., Cormier, G. (2011). [Optimization of steel floor systems using particle swarm optimization](#). *Journal of Constructional Steel Research*, 67(8):1225–1231.
- [12] Hendawi, S., Frangopol, D. M. (1994). [Design of composite hybrid plate girder bridges based on reliability and optimization](#). *Structural Safety*, 15(1-2):149–165.
- [13] Luo, Y., Li, A., Kang, Z. (2011). [Reliability-based design optimization of adhesive bonded steel–concrete composite beams with probabilistic and non-probabilistic uncertainties](#). *Engineering Structures*, 33(7): 2110–2119.
- [14] Kaveh, A., Maniat, M., Naeini, M. A. (2016). [Cost optimum design of post-tensioned concrete bridges using a modified colliding bodies optimization algorithm](#). *Advances in Engineering Software*, 98:12–22.
- [15] Pedro, R. L., Demarche, J., Miguel, L. F. F., Lopez, R. H. (2017). [An efficient approach for the optimization of simply supported steel-concrete composite I-girder bridges](#). *Advances in Engineering Software*, 112:31–45.

- [16] Senouci, A. B., Al-Ansari, M. S. (2009). [Cost optimization of composite beams using genetic algorithms](#). *Advances in Engineering Software*, 40(11):1112–1118.
- [17] Khatri, V., Singh, P. K., Maiti, P. R. (2012). Comparative study of economical design aspect of steel-concrete composite bridge with MS, HPS and hybrid steel. *International Journal of Engineering Research and Development*, 4(6):62–68.
- [18] Kravanja, S., Žula, T., Klanšek, U. (2017). [Multi-parametric MINLP optimization study of a composite I beam floor system](#). *Engineering Structures*, 130:316–335.
- [19] Hoàn, P. T., Trung, P. V., Việt, V. Q. (2020). [Nghiên cứu xác định vị trí tối ưu của sườn tăng cường dọc của dầm cầu thép chịu uốn](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD)-ĐHXD*, 14(4V):29–38.
- [20] Truong, V.-H., Papazafeiropoulos, G., Pham, V.-T., Vu, Q.-V. (2019). Effect of multiple longitudinal stiffeners on ultimate strength of steel plate girders. *Structures*, Elsevier, 22:366–382.
- [21] Kim, S.-E., Papazafeiropoulos, G., Graciano, C., Truong, V.-H., Do, Q. T., Kong, Z., Vu, Q.-V. (2021). [Optimal design of longitudinal stiffeners of unsymmetric plate girders subjected to pure bending](#). *Ocean Engineering*, 221:108374.
- [22] TCVN 11823:2017. *Thiết kế cầu đường bộ*. Bộ Khoa học và Công nghệ.
- [23] 22TCN272-05. *Tiêu chuẩn thiết kế cầu*. Bộ Giao thông vận tải.
- [24] Lựu, M., Lam, L. H. (2019). *Cầu bê tông cốt thép (thiết kế theo TCVN 11823:2017)*. Nhà xuất bản Giao thông Vận tải.
- [25] Tiến, N. D., Minh, N. V., Tú, Đ. A., Nam, H. X. (2019). *Phương pháp hiện đại phân tích kết cấu cầu*. Nhà xuất bản Giao thông Vận tải.
- [26] Nhậm, N. V., và cs. (2019). *Cầu thép theo TCVN 11823:2017*. Nhà xuất bản Xây dựng.
- [27] Bảo, T. Q., Dương, N. H. (2019). *Hướng dẫn thiết kế cầu dầm thép chữ I liên hợp bản Bê tông Cốt thép liên tục hai nhịp theo tiêu chuẩn thiết kế cầu đường bộ TCVN 11823-2017*. Nhà xuất bản Xây dựng.
- [28] Storn, R., Price, K. (1997). [Differential evolution - A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces](#). *Journal of Global Optimization*, 11(4):341–359.
- [29] Vi, N. K. (2017). *Phân tích lựa chọn tiết diện hợp lý của cầu dầm thép liên hợp với bản bê tông cốt thép bị khổng chế về chiều cao*. Luận văn thạc sĩ kỹ thuật xây dựng công trình giao thông.