

SỬ DỤNG BIỂU DIỄN TRỰC QUAN ĐỘNG HỖ TRỢ HỌC SINH SUY LUẬN TOÁN HỌC

NGUYỄN DANH NAM

Đại học Thái Nguyên

NGUYỄN THỊ DIỆU NGỌC

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên

Nhận bài ngày 10/4/2021. Sửa chữa xong 15/4/2021. Duyệt đăng 20/4/2021.

Abstract

The paper presents experimental research on dynamic geometry software by using visual representation in the process of supporting students with mathematical reasoning. The research results show that, during the proofing process, students have combined many types of mathematical reasoning based on the data provided from the dynamic geometrical environment, and at the same time we also have found that the changes of mathematical objects help students make hypotheses, appear needs and ideas to support those hypotheses. The paper also provides a proof of geometric problems with the support of dynamic visual representations on computers.

Keywords: Representation, visual representation, dynamic visual representation, mathematical reasoning, reasoning competence.

1. Đặt vấn đề

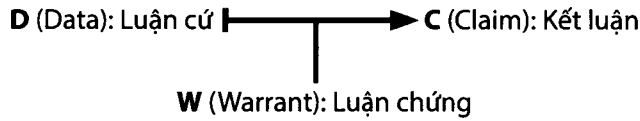
Phát triển khả năng suy luận cho học sinh (HS) được nhấn mạnh trong chương trình toán học ở nhiều nước trên thế giới [4]. Suy luận là một hoạt động thường xuyên của toán học. Hội đồng giáo viên (GV) toán quốc gia của Hoa Kỳ cũng đã xác định: suy luận và chứng minh là một trong số mười tiêu chuẩn cho toán học nhà trường [5]. Bằng việc phát triển các ý tưởng, khám phá các hiện tượng, xác minh các kết quả và sử dụng suy luận toán học trong tất cả các lĩnh vực, ở tất cả các lớp học, HS có thể nhìn thấy và tin tưởng rằng toán học là có ý nghĩa [1], [3]. Khả năng suy luận phát triển khi HS được khuyến khích để đưa ra các dự đoán, tìm kiếm các bằng chứng để ủng hộ hay bác bỏ chúng, giải thích các ý tưởng toán học. Nếu khả năng suy luận không được phát triển cho HS thì toán học chỉ là một tập hợp các công thức, thuật toán, quy tắc và các ví dụ mang tính biểu diễn mà không hiểu tại sao chúng có ý nghĩa [4], [10].

Suy luận và biểu diễn toán học là hai trong số tám năng lực được chọn để đánh giá trong chương trình đánh giá HS quốc tế PISA, một chương trình do Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế OECD khởi xướng và chỉ đạo, nhằm tìm kiếm các chỉ số đánh giá tính hiệu quả, chất lượng của hệ thống giáo dục của mỗi nước tham gia, qua đó rút ra các bài học về chính sách đối với giáo dục phổ thông của mỗi quốc gia. Biểu diễn trực quan là một dạng của biểu diễn toán học và giúp cho quá trình dạy học có hiệu quả cao hơn [8], [14], trong đó biểu diễn trực quan “động” là công cụ để trực quan hóa sự thay đổi của các đối tượng toán học trừu tượng. Nó mô tả trực quan về mối quan hệ giữa các đối tượng, kí hiệu toán học thông qua các hình vẽ, sơ đồ, biểu đồ, đồ thị, phác thảo hình học hoặc mô hình trực quan động trên máy tính điện tử... [13]. Do đó, có thể thấy biểu diễn trực quan nói chung và biểu diễn trực quan động nói riêng cho phép HS trao đổi các cách tiếp cận bài toán, các suy luận và thông hiểu của học sinh, giúp học sinh nhận thấy ý nghĩa của các khái niệm toán học và mối quan hệ giữa chúng. Để từ đó áp dụng vào suy luận toán học cho những vấn đề thực tế [10], [14].

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Một số khái niệm

Toulmin (1958) cho rằng lập luận chặt chẽ là kỹ năng cơ bản của con người sống trong thế kỉ XXI. Chính vì vậy, ông đã dành nhiều thời gian nghiên cứu về bản chất của quá trình lập luận, đặc biệt là lập luận toán học. Toulmin xem xét một lập luận gồm có ba thành tố cơ bản là: luận cứ, kết luận và luận chứng [12]. Luận cứ (hay còn gọi là tiền đề) là một hoặc nhiều dữ kiện xuất phát làm căn cứ cho lập luận, từ đó để suy ra kết luận, nó trả lời cho câu hỏi “chứng minh bằng cái gì?”. Kết luận là một khẳng định có được trên cơ sở luận cứ đã cho, nó trả lời cho câu hỏi “chứng minh cái gì?”. Luận chứng là những quy tắc, nguyên lý, định lý,... mà nhờ đó từ tiền đề chúng ta suy ra kết luận, nó trả lời cho câu hỏi “chứng minh bằng cách nào?”. Ngoài ba thành tố cơ bản trên, Toulmin còn bổ sung thêm ba thành tố phụ nữa đó là: luận chứng bổ sung sử dụng trong trường hợp luận chứng ban đầu chưa đủ sức thuyết phục, miễn bác bỏ xét xem trong trường hợp nào thì lập luận không còn đúng nữa và mức độ đáng tin của lập luận chẳng hạn như: chắc chắn đúng, có thể đúng, không thể,... Dưới đây là dạng cơ bản của mô hình Toulmin:



Suy luận là sử dụng các quy tắc, các bằng chứng và những kiến thức đã có để suy ra các kết luận mới, xây dựng các giải thích hoặc đánh giá các kết luận khác. Có ba loại suy luận thường sử dụng trong chứng minh toán học. Suy luận suy diễn là suy luận sử dụng các quy tắc logic toán và các tiên đề đã biết để khẳng định sự đúng đắn của một kết quả và thường sử dụng trong quá trình chứng minh toán học. Suy luận quy nạp là suy luận nhằm đưa ra một giả thuyết mang tính tổng quát (không chắc chắn đúng) từ việc kiểm chứng tính đúng đắn của giả thuyết cho một số trường hợp cụ thể. Quy nạp cũng được dùng để hỗ trợ cho phương án giải quyết vấn đề, giải quyết một bài toán đơn giản hơn bằng cách hạn chế lại số trường hợp cần xem xét và sau đó dùng suy luận quy nạp để tổng quát hóa kết quả cho bài toán chính. Suy luận ngoại suy là suy luận nhằm đưa ra một giả thuyết có lý (nhưng không chắc chắn đúng) để giải thích cho một kết quả ngạc nhiên quan sát được. Ngoại suy cũng được dùng để định hướng cho quá trình chứng minh bằng cách suy luận ngược từ điều cần chứng minh (các kết luận) đến giả thiết mà bài toán cho sẵn (các trường hợp).

Các biểu diễn trực quan thường được sử dụng là các hình vẽ, hình ảnh, sơ đồ, đồ thị, biểu bảng,... Biểu diễn trực quan động không chỉ cung cấp những hình ảnh động, trực quan để minh họa cho các ý tưởng toán học mà còn được thừa nhận như một thành phần hỗ trợ cho suy luận. Với đặc điểm của phần mềm hình học động là bảo toàn các mối quan hệ và cấu trúc toán học đã được xác định trước giữa các đối tượng khi di chuyển, một vài mối quan hệ hình học có thể không được phát hiện khi quan sát hình vẽ ở dạng tĩnh nhưng lại xuất hiện khi HS tiến hành các thao tác lên biểu diễn trực quan động. Quá trình kéo rê cũng giúp HS nhận ra “sự chuyển động của các đối tượng hình học khác nhau là phụ thuộc lẫn nhau”, sự phụ thuộc về mặt chuyển động này được chuyển thành mối quan hệ phụ thuộc lẫn nhau giữa các đối tượng trong hình học Ơclit. Từ đó để xuất các giả thuyết khi khám phá các bài toán hình học [2], [6]. Do đó, có thể nói các phần mềm hình học động đã thay đổi cách suy nghĩ về các đối tượng hình học truyền thống vì trong khi di chuyển hay kéo rê các đối tượng hình học, đo đạc và kiểm tra các tính chất, người học có thể nhận ra các tính chất bất biến hình học [1], [6]. Từ đó, giả thuyết ban đầu về các đối tượng hình học và mối quan hệ giữa chúng được hình thành, sau đó, phần mềm hình học động cũng hỗ trợ quá trình kiểm tra tính đúng đắn của các giả thuyết đó [9], [10].

Các biểu diễn khác nhau của đối tượng (bảng biểu, đồ thị,...) có thể xuất hiện cùng lúc trên màn hình cùng với các số liệu được cập nhật liên tục, tức thời ngay khi có sự thay đổi trên biểu diễn trực

quan động giúp HS tập trung vào việc quan sát và đề xuất giả thuyết thay vì dành thời gian cho việc vẽ các hình khác nhau trên giấy [7]. Không chỉ tạo cơ hội cho HS quan sát và đề xuất giả thuyết bằng suy luận ngoại suy, việc sử dụng biểu diễn trực quan động trên máy tính còn hỗ trợ hiệu quả cho quá trình kiểm chứng và tổng quát hóa giả thuyết bằng suy luận quy nạp. Trong môi trường hình học động, chỉ với một vài thao tác lên biểu diễn trực quan động, HS có thể kiểm chứng giả thuyết bằng thực nghiệm thông qua một số lượng lớn các thử nghiệm toán học với các phản hồi chính xác và gần như ngay lập tức, học sinh có thể hình dung được toàn bộ quá trình trung gian diễn ra như thế nào để đưa ra kết luận cho trường hợp tổng quát hoặc đưa ra phản ví dụ nếu sai.

Như vậy, phần mềm hình học động có thể hỗ trợ hiệu quả cho việc học toán thông qua thực nghiệm bằng các thao tác động, trong đó người học khám phá, thực nghiệm và hình thành kiến thức toán học thông qua các tương tác. Các biểu diễn trực quan động mô tả được các giai đoạn trung gian, giúp người học thực hiện được những thao tác trên các đối tượng toán học, lưu giữ được những bất biến của đối tượng, thực hiện được các tính toán một cách chính xác và tương ứng với những vị trí khác nhau của đối tượng. Sự kết hợp hài hòa giữa các biểu diễn giúp GV hỗ trợ tốt HS kiến tạo tri thức mới. Hầu hết các khái niệm và phương pháp được dạy trong chương trình đều xuất phát từ việc giải quyết các tình huống thực tế. Do đó, ban đầu GV sử dụng biểu diễn thực tế rồi biểu diễn thao tác được, biểu diễn trực quan.

2.2. Sử dụng biểu diễn trực quan hỗ trợ HS suy luận toán học

Phát triển năng lực suy luận toán học cho người học là một trong những yêu cầu quan trọng trong chương trình toán học ở bậc phổ thông và bậc đại học. Một số nghiên cứu chỉ ra rằng, sự xuất hiện phép chứng minh ở Hy Lạp gắn liền với sự xuất hiện của nền dân chủ: thói quen biện luận, tranh luận được chuyển từ lĩnh vực chính trị sang toán học [9], [12]. Do đó, thông qua quá trình dạy toán, GV cần giúp cho người học làm quen với việc tạo các giả thuyết, đưa ra các lập luận để bảo vệ giả thuyết đó và khuyến khích sử dụng các phương pháp chứng minh khác nhau trong một bài toán [6]. Trong chương trình sách giáo khoa của nhiều nước trên thế giới, chứng minh hình học được xem là hoạt động trọng tâm của môn Toán nhằm giúp HS tiếp cận với các quy tắc, các phương pháp sáng tạo của các nhà toán học [8], [9]. Cấp độ chứng minh hình học cũng được nâng dần từ bậc học phổ thông đến bậc đại học dưới các hình thức khác nhau như: giải thích, kiểm chứng, chứng minh.

Trong hình học, phép chứng minh gắn bó chặt chẽ với sự thay đổi quan hệ giữa các đối tượng hình học được biểu diễn trực quan trên hình vẽ. Chính vì thế, người học cần phải vượt qua được chướng ngại về mặt nhận thức mang tính trực quan do hình vẽ cung cấp. Theo nghĩa truyền thống, chứng minh là để thuyết phục người khác tin vào lập luận của mình, để hiểu các tri thức mới. Tuy nhiên, ở bậc phổ thông quá trình chứng minh được tiếp cận theo hướng giải thích và kiểm chứng nhiều hơn so với bậc đại học [6]. Do đó, một số nhà toán học đã tập trung nghiên cứu và đưa ra các chức năng sau đây của chứng minh toán học [5], [9]: 1) Xác minh, thuyết phục (tính đúng đắn của mệnh đề); 2) Giải thích (tại sao mệnh đề lại đúng); 3) Hệ thống hoá (sắp xếp các kết quả khác nhau theo hệ thống lôgic các khái niệm và định lý đã học); 4) Giao tiếp (truyền đạt tri thức toán học); 5) Khám phá (tìm hiểu, phát hiện tri thức mới); 6) Phát triển (nâng cao năng lực chứng minh và mở rộng vốn tri thức);

Sự ra đời của phần mềm hình học động đặt ra câu hỏi là vai trò và chức năng của chứng minh trong khung chương trình toán học có thay đổi không, vì “sức thuyết phục” của phần mềm có thể giúp người học nhận thấy kết quả một cách dễ dàng mà không còn nhu cầu chứng minh nữa [5]. Tuy nhiên, vẫn còn có nhiều ý kiến trái ngược nhau xung quanh vấn đề này. Một số nhà nghiên cứu cho rằng, chính phần mềm hình học động đã thay đổi cách suy nghĩ về các đối tượng hình học truyền thống vì trong khi di chuyển (hay kéo rê) các đối tượng hình học, đo đạc và kiểm tra các tính chất, HS có thể nhận ra các bất biến hình học [9], [11]. Từ đó, giả thuyết ban đầu về các đối tượng hình học và mối quan hệ giữa chúng được hình thành, đồng thời phần mềm cũng hỗ trợ kiểm tra tính đúng đắn

của các giả thuyết đó [5], [14]. Thông qua quá trình này, sự xuất hiện các tình huống dẫn đến nhu cầu chứng minh bài toán đó vì quá trình lập luận được chuyển từ trực quan sinh động sang một cấp độ cao hơn là dùng lời để mô tả và giải thích các hiện tượng quan sát được.

2.3. Kết quả nghiên cứu

Các biểu diễn cung cấp cho HS những công cụ tư duy hiệu quả. Sử dụng biểu diễn trực quan như là một công cụ, HS có thể tiếp cận khái niệm cũng như các ứng dụng của khái niệm. Biểu diễn ký hiệu giúp khẳng định những kết luận có được một cách chính xác, biểu diễn ngôn ngữ giúp cho việc chuyển và tiếp nhận thông tin. Hơn nữa, biểu diễn trực quan động cung cấp cho HS một môi trường học toán hiệu quả. Các biểu diễn trực quan động mô tả được các giai đoạn trung gian, giúp người học thực hiện được những thao tác trên các đối tượng toán học, lưu giữ được những bất biến của đối tượng hình học, thực hiện được các tính toán một cách chính xác và ứng với những vị trí khác nhau của đối tượng.

Sử dụng các biểu diễn động giúp HS tiếp cận với bản chất của vấn đề trong hình học, từ đó đưa ra được cách giải quyết cho vấn đề. Nếu giáo viên cung cấp một môi trường học tập với biểu diễn trực quan động, học sinh có thể trải nghiệm với những biểu diễn khác nhau và chọn được các biểu diễn có ý nghĩa nhất. Những thông tin được lưu giữ trong trí óc về các biểu diễn có ý nghĩa này sẽ là những thành tố quan trọng trong hỗ trợ HS giải quyết vấn đề. Công nghệ thông tin hỗ trợ tốt cho việc thiết kế các biểu diễn trực quan động. Công nghệ làm cho việc vẽ hình dễ dàng hơn, có thể tạo ra từ ba đến bốn loại biểu diễn thể hiện trên màn hình cùng một lúc. Các biểu diễn trực quan động với sự thể hiện đồng thời của hình học động, ký hiệu động và thể hiện số động là một thế mạnh rõ ràng của việc ứng dụng công nghệ thông tin cho dạy học toán.

Biểu diễn trực quan động giúp HS luôn tự đặt ra các câu hỏi cho mình “điều gì sẽ xảy ra nếu hoặc nếu không”. Những câu hỏi tự nhiên này là cơ sở gợi động cơ và liên kết giữa các hoạt động thực hành trên máy vi tính và lập luận suy diễn. Tuy nhiên, thực tế cho thấy, các luận cứ sinh ra trong quá trình thao tác với phần mềm khiến người học có xu hướng sử dụng suy luận theo kiểu kinh nghiệm, quy nạp hơn là dùng suy diễn. Đặc biệt, nhiều nghiên cứu chỉ ra rằng tồn tại mối liên hệ giữa những thực nghiệm kiểu quy nạp với cấu trúc suy diễn của chứng minh hình học cũng như mối liên hệ giữa lập luận suy diễn với những hoạt động khám phá tri thức mới.

Trong thực nghiệm, chúng tôi đã yêu cầu các nhóm HS sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn các trực quan động và hỗ trợ quá trình suy luận toán học. Phần mềm Wink[®] được sử dụng trong suốt quá trình suy luận của nhóm để chụp lại màn hình làm việc và các thao tác nhập dữ liệu từ bàn phím với tốc độ 2 hình ảnh/giây, đồng thời kích hoạt chức năng ghi âm cuộc tranh luận giữa các HS trong nhóm để phục vụ cho việc phân tích các giai đoạn của quá trình chứng minh. Sau đây là kết quả phân tích của phần mềm Wink[®], mô hình Toulmin được sử dụng để phân tích lập luận của nhóm HS tham gia thực nghiệm:

Bài toán. Dựng ra phía ngoài ΔABC các tam giác đều BCA' , CAB' , ABC' và có tâm lần lượt là O_1, O_2, O_3 . Chứng minh rằng các đoạn AA', BB', CC' bằng nhau và $\Delta O_1O_2O_3$ là tam giác đều.

Sau khi vẽ hình, nhóm HS dùng phần mềm GeoGebra di chuyển các điểm, đo độ dài các đoạn thẳng trên và nhận thấy:

- #1. H: Cả ba đoạn thẳng đều có số đo bằng nhau!
- #2. M: uh, nhưng làm sao để chứng minh được điều này?
- #3. L: Chúng có là cạnh tương ứng của những tam giác bằng nhau không? Hoặc chúng có là ảnh của nhau qua một phép dời hình không?
- #4. H: Nếu là phép dời hình thì là phép nào? Có các yếu tố về tam giác đều nên có thể là phép quay?
- #5. L: Vậy phép quay tâm ở đâu và góc quay bằng bao nhiêu để biến BB' thành CC' ?

#6. H: uh, để biến B' thành C, biến B thành C' thì là phép quay tâm A, góc quay 60°?

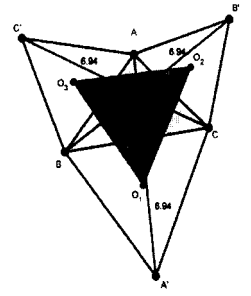
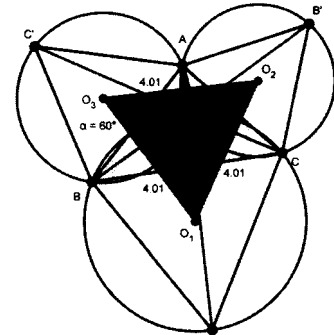
#7. M: Đúng rồi, như vậy có thể suy ra được BB' = CC'.

#8. L: Tương tự, ta có thể sử dụng phép quay tâm B, góc quay 60° có thể biến C' thành A và biến C thành A'?

#9. H: Điều đó có nghĩa là chúng ta đã chứng minh được BB' = CC' và CC' = AA', suy ra được điều phải chứng minh.

#10. L: Bây giờ cần chứng minh ΔO₁O₂O₃ là tam giác đều! Liệu có thể sử dụng phép quay nữa được không?

#11. M: Phép quay tâm O₃ biến B thành A, phép quay tâm O₂ biến A thành C. Do đó, tích của hai phép quay này có thể biến B thành C, từ đó suy ra ΔO₁O₂O₃ đều.

	
<p>C₁: Ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau</p> <p>D₁: ? → C₁</p> <p style="text-align: center;">W: Sử dụng phép quay tâm A</p> <p>D₁: AB = AC', AC = AB', ∠BAC' = 60°, ∠B'AC = 60°</p> <p>D₂: ? → C₁</p> <p style="text-align: center;">W: Sử dụng phép quay tâm B</p>	<p>D₂: BC' = BA, BA' = BC, ∠C'BA = 60°, ∠CBA' = 60°</p> <p>D₃: ? → C₂: ΔO₁O₂O₃ đều</p> <p style="text-align: center;">W: Sử dụng tích của hai phép quay khác tâm O₂, O₃</p> <p>D₃: Q_{O₃}^{120°}(B) = A; Q_{O₂}^{120°}(A) = C và Q_{O₃}^{120°}.Q_{O₂}^{120°} = Q_{O₁}^{-120°}(B) = C</p>

Trong quá trình biểu diễn trực quan động, các dữ kiện thu thập được từ việc quan sát hay thao tác trên các hình động sẽ dẫn đến phép lập luận ngoại suy. Qua nghiên cứu thực nghiệm, chúng tôi đề xuất các giai đoạn sử dụng suy luận toán học như sau: (1) Tìm các bất biến: Phát hiện các bất biến hình học của các phép biến hình (phép đối xứng, phép tịnh tiến, phép quay,...); (2) Hình thành giả thuyết: Thành lập giả thuyết dựa trên các dữ kiện thu thập được với sự trợ giúp của phần mềm, xác định hướng chứng minh giả thuyết đó; (3) Suy luận chính là quá trình sử dụng các lập chứng, luận cứ có được trong quá trình chứng minh giả thuyết và tìm thêm những luận chứng mới. Từ đó hoàn thành chứng minh bằng cách sắp xếp các luận cứ, luận chứng theo một trình tự hợp lôgic; (4) Đào sâu vấn đề: Mở rộng, khái quát hoá, đặc biệt hoá, tương tự hoá hoặc tìm các phương pháp chứng minh khác cho bài toán. Như vậy, quá trình chứng minh hình học với sự hỗ trợ của phần mềm hình học động với biểu diễn trực quan động được thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: (Quan sát, suy luận quy nạp, hình thành giả thuyết) HS quan sát các hiện tượng trên hình vẽ, kéo rê các đối tượng, đo đạc, kiểm tra các mối quan hệ hình học và lập giả thuyết.

Bước 2: (Suy luận suy diễn): Chứng minh hoặc bác bỏ giả thuyết.

Bước 3: (Suy luận ngoại suy) HS tìm tòi các dữ kiện, lựa chọn các quy tắc hay phương pháp để giải thích và kiểm chứng các giả thuyết đã đưa ra dựa trên kinh nghiệm cá nhân và suy luận toán học.

Bước 4: (Suy luận suy diễn và quy nạp) Chuyển tiếp các suy luận dùng để kiểm chứng các giả thuyết sang các suy luận suy diễn (để hoàn thành chứng minh) hay các suy luận quy nạp (để kiểm tra lại kết quả).

Như vậy, kết quả phân tích quá trình suy luận cho thấy, HS đã sử dụng phép suy luận ngoại suy để tìm ra phương pháp giải quyết bài toán. Điều này là hoàn toàn hợp lý vì qua thao tác với phần

mềm, học sinh dễ dàng kiểm chứng được độ dài các đoạn thẳng là bằng nhau. Tuy nhiên, để chứng minh được điều này, suy luận suy diễn được sử dụng trong suốt quá trình tranh luận nhằm giải thích cho các hiện tượng đã quan sát như: độ dài các cạnh bằng nhau, hai tam giác bằng nhau, tam giác đều,... Nhóm HS dành hầu hết thời gian trong các giai đoạn tìm bất biến, suy luận và hoàn thành chứng minh. Trong quá trình tìm các bất biến hình học, một số giả thuyết ban đầu đã được tạo ra và ngay sau đó là suy luận để kiểm chứng cho các giả thuyết đó. Tuy nhiên, HS dành nhiều thời gian vào giai đoạn tìm kiếm các luận chứng, luận cứ hỗ trợ các suy luận và viết chứng minh. Qua thực nghiệm, chúng tôi cũng nhận thấy, HS gặp khó khăn khi không thiết lập được chuỗi các lập luận lôgic, vận dụng sai các quy tắc suy luận lôgic, khó khăn trong sử dụng ngôn ngữ và kí hiệu toán học, khó khăn trong việc nhận ra các bất biến hình học, khó khăn trong việc chuyển tiếp từ suy luận quy nạp hoặc ngoại suy sang suy luận suy diễn,...

3. Kết luận

Hoạt động suy luận toán học cần được “nhúng” vào trong môi trường khám phá, phát minh lại tri thức để người học có thể thấy được “quá trình” sáng tạo của nhân loại. Quá trình này nhằm làm giảm bớt các thủ thuật trong chứng minh và giúp cho người học làm quen với con đường tiếp cận giải quyết vấn đề của các nhà toán học. Mô hình Toulmin có tác dụng mô tả một cách dễ hiểu các loại suy luận toán học. Điều này giúp chúng ta thấy rõ hơn bản chất của quá trình suy luận và chứng minh hình học cũng như nhận ra các chướng ngại về mặt cấu trúc giữa chúng. Việc khai thác sử dụng phần mềm hình học động một cách thích hợp trong quá trình dạy học, GV sẽ góp phần giúp HS phát triển khả năng quan sát những biểu diễn trực quan động đưa ra những giả thuyết mới và thực hiện tổng quát hóa, khả năng xác định căn cứ ở mỗi bước lập luận của HS, khả năng phát hiện quy luật hay tính chất toán học nhờ việc sử dụng kết hợp các loại suy luận như quy nạp, suy diễn và ngoại suy trong quá trình chứng minh toán học.

Tài liệu tham khảo

1. Arcavi, A, *Vai trò của biểu diễn trực quan trong học tập môn Toán*, Tạp chí Nghiên cứu giáo dục toán học (*Educational Studies in Mathematics*), số 52/2013, tr. 215-241.
2. Arzac, G., Chapiro, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y., Mante, M. (1995). *Nhập môn về lập luận suy diễn ở trường trung học cơ sở*, NXB Giáo dục, Hà Nội, 1995.
3. Vũ Đình Chinh, *Rèn luyện cho học sinh năng lực phán đoán và lập luận có căn cứ để phát hiện tri thức trong dạy học hình học ở trường phổ thông*, Luận án Tiến sĩ Khoa học giáo dục, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, 2016.
4. Nguyễn Thị Duyên, Nguyễn Thị Quỳnh Như, *Năng lực suy luận đồng biến thiên của học sinh trung học phổ thông*, Tạp chí Giáo dục, số 454, kì 2/2019, tr. 50-57.
5. Hanna, G, *Ổng quan về chứng minh, giải thích và khám phá*, Tạp chí Nghiên cứu giáo dục toán học (*Educational Studies in Mathematics*), số 44/2000, tr. 5-23.
6. Nguyen Danh Nam, *Vai trò của suy luận ngoại suy trong phát hiện các bất biến hình học*. Trong A. Méndez-Vilas (chủ biên), *Giáo dục trong thế giới công nghệ: những xu hướng nghiên cứu và công nghệ mới nổi*, Trung tâm nghiên cứu Formatex, Tây Ban Nha, 2011, tr. 539-547.
7. Nguyễn Danh Nam, *Phương pháp mô hình hóa trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Đại học Thái Nguyên, 2016.
8. Nguyễn Danh Nam, Nguyễn Thị Hương, *Phát triển năng lực suy luận ngoại suy cho học sinh thông qua dạy học hình học ở trường trung học cơ sở*, Tạp chí Giáo dục, số 407, kì 1/2017, tr. 32-36.
9. Pedemonte, B., Reid, D, *Vai trò của suy luận ngoại suy trong quá trình chứng minh*, Tạp chí Nghiên cứu giáo dục toán học (*Educational Studies in Mathematics*), số 76/2011, tr. 281-303. DOI: 10.1007/s10649-010-9275-0.
10. Nguyễn Đăng Minh Phúc, *Vai trò của thực nghiệm toán học trong các phần mềm hình học động*, Tạp chí khoa học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, tập 56, số 5/2011, tr. 101-108.
11. Trương Thị Khánh Phương, *Sử dụng biểu diễn trực quan hỗ trợ suy luận quy nạp và ngoại suy của học sinh mười năm tuổi trong quá trình tìm kiếm quy luật toán*, Luận án Tiến sĩ Khoa học giáo dục, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, 2015.
12. Toulmin, S, *Sử dụng lập luận*. NXB Đại học Cambridge, 2003.
13. Nguyễn Tiến Trung, Bùi Gia Hiếu, *Dạy học phát triển năng lực giao tiếp toán học cho học sinh trung học phổ thông thông qua biểu diễn trực quan toán học*, Tạp chí Giáo dục, số 369, kì 1/2003, tr. 30-32.
14. Trần Vui, *Biểu diễn trực quan trong việc học toán*, Tạp chí Giáo dục, số 227, kì 1/2009, tr. 53-55.