

# Mô hình hóa và mô phỏng kết cấu chứa nhiều pha vật liệu dị hướng bằng phương pháp trường pha đơn biến

■ TS. VŨ BÁ THÀNH<sup>(\*)</sup>; KS. PHẠM MẠNH TUẤN

Trường Đại học Giao thông vận tải

Email: <sup>(\*)</sup>thanhvb@utc.edu.vn

**TÓM TẮT:** Nghiên cứu này sử dụng phương pháp trường pha đơn biến để mô phỏng hư hỏng kết cấu chứa vật liệu dị hướng. Trong đó, việc chỉ sử dụng một biến trường pha (đơn biến) thay vì nhiều biến như các nghiên cứu trước đây, làm đơn giản hóa thuật toán của phương pháp và tiết kiệm thời gian tính toán. Hơn nữa, nghiên cứu này cũng khảo sát hướng phát triển vết nứt và đường cong ứng xử ứng suất-biến dạng cho các kết cấu chứa một pha hoặc nhiều pha vật liệu dị hướng, trong đó mỗi pha có một hướng ưu tiên khác nhau. Kết quả đạt được cho thấy, với kết cấu chứa một pha vật liệu, cho dù các hướng nứt khác nhau nhưng đường cong ứng suất-biến dạng hầu như không thay đổi. Trong khi đó, các kết cấu chứa hai pha vật liệu khác nhau, đường cong ứng suất-biến dạng thay đổi phụ thuộc vào hướng nứt ưu tiên của pha vật liệu thứ hai. Việc so sánh kết quả hiện tại với kết quả tham chiếu cho thấy phương pháp trường pha đề xuất có thể mô phỏng tốt các kết cấu chứa một hoặc nhiều pha vật liệu dị hướng.

**TỪ KHÓA:** Phương pháp trường pha, vật liệu dị hướng, kết cấu đa pha, đường cong ứng xử, hư hỏng.

**ABSTRACT:** This study uses a single-variable phase field method to simulate damage in structures containing anisotropic materials. By employing only a single phase field variable instead of multiple phase field variables as in previous studies, the algorithm of the method is simplified, and computational time is reduced. Furthermore, this study investigates crack propagation directions and stress-strain curves for structures containing either a single phase or multi-phase of anisotropic materials, with each phase having a different preferential direction. The results indicate that for structures containing a single-phase material, the stress-strain curves remain virtually unchanged despite different crack directions. In contrast, for structures containing two different phases of anisotropic material, the stress-strain curves vary

depending on the preferential crack direction of the second material phase. Comparing the present results with reference results shows that the proposed phase field method can effectively simulate structures containing either a single or multi-phase of anisotropic materials.

**KEYWORDS:** Phase field modeling, anisotropy, multi-phase structures, behavior curve, damage.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong những năm gần đây, phương pháp trường pha được sử dụng phổ biến để mô phỏng hư hỏng các kết cấu chứa các vật liệu khác nhau cũng như các trạng thái tác dụng tải trọng khác nhau. Phương pháp mô phỏng này sử dụng tổng năng lượng tồn tại trong vật thể bao gồm năng lượng biến dạng đàn hồi và năng lượng để tách hai bề mặt vết nứt, do đó nó có thể dự đoán được sự hình thành, phát triển và phân nhánh vết nứt mà không cần phải tạo ra hư hỏng trước cho kết cấu.

Tuy nhiên, phương pháp này thường thực hiện trong khung phần tử hữu hạn, do đó nó cũng tồn tại khá nhiều yếu tố ảnh hưởng tới kết quả mô phỏng, nhất là các tham số đầu vào cho bài toán như: Kích thước lưới phần tử, tham số chiều dài đại diện cho bề rộng chính tắc của vết nứt và bước gia tải tác dụng vào kết cấu. Bởi tham số chiều dài phụ thuộc vào các đặc tính vật liệu như mô-đun đàn hồi, năng lượng kháng nứt và cường độ chịu kéo, nên kích thước phần tử thường nhỏ dẫn đến thời gian tính toán của phương pháp này khá lớn.

Từ trước đến nay, nhiều nghiên cứu đã cố gắng cải thiện hơn nữa cho phương pháp mô phỏng này về tính chính xác của ứng xử kết cấu cũng như giảm thời gian tính toán để phương pháp này ngày càng hữu ích hơn nữa cho lĩnh vực nghiên cứu cơ học phá hủy. Trong đó, các công trình của [1, 2] đã nghiên cứu và đưa ra một họ hàm suy biến mới áp dụng vào phương pháp giúp cho việc dự đoán chính xác ứng xử vật liệu và tải trọng tới hạn của vật liệu giòn, đồng nhất đẳng hướng, trong khi không phụ thuộc nhiều vào kích thước lưới phần tử. Nghiên cứu [3, 4] đã áp dụng tính chất phi cục bộ hóa để tìm ra sự độc lập kích thước lưới

với đường phát triển vết nứt. Các phương pháp trên đều có mục đích làm giảm thời gian mô phỏng.

Ngoài ra, các nghiên cứu [2, 5, 6] cũng tìm ra một số dạng phân tách trục giao thành phần ten-xơ biến dạng để giúp loại bỏ các điểm kỳ dị trên kết cấu hư hỏng và hiệu ứng giả trên đường cong ứng xử. Các nghiên cứu này chứng minh rằng điều kiện trục giao trên có thể được áp dụng cho các loại vật liệu giòn như đàng hướng, dị hướng và đa pha, trong khi các nghiên cứu [7, 8] đều không thỏa mãn điều kiện này.

Trong mô phỏng vật liệu dị hướng, các nghiên cứu [9-12] đều sử dụng nhiều biến trường pha đại diện cho các hướng hư hỏng ưu tiên trong kết cấu, điều này làm phức tạp việc triển khai biểu thức liên quan dẫn tới công cụ xử lý thuật toán phức tạp. Để cải thiện vấn đề này, nghiên cứu hiện tại chỉ sử dụng một biến trường pha (đơn biến) cho việc mô phỏng kết cấu dị hướng với các ví dụ đa dạng: (i) Kéo tấm chứa một pha vật liệu dị hướng; (ii) Kéo tấm chứa hai pha vật liệu dị hướng khác nhau; (iii) Uốn ba điểm một dầm chứa ba lớp vật liệu dị hướng. Việc khảo sát các ví dụ với các trạng thái gia tải và kết cấu khác nhau giúp có cái nhìn tổng quan về ưu điểm của phương pháp mô phỏng đề xuất, trong việc so sánh với các phương pháp tham chiếu liên quan.

## 2. PHƯƠNG PHÁP TRƯỜNG PHA ĐƠN BIẾN CHO VẬT LIỆU DỊ HƯỚNG

Cho một miền nứt  $V$  chứa vật liệu dị hướng, với  $\partial V$  là biên ngoài của miền. Xét vết nứt  $\Gamma$  trong miền  $V$ . Một biến trường pha  $\theta(x)$  với  $x \in V$  được sử dụng để mô tả trạng thái hư hỏng của vật thể. Tổng năng lượng trong vật thể này bao gồm năng lượng đàn hồi và năng lượng để tạo ra hai bề mặt vết nứt được định nghĩa như sau:

$$\bar{\Psi}(u, \theta) = \int_V \bar{\Psi}_u(e, \theta) dV + \int_V G_c \phi(\theta, \nabla \theta, \rho) dV \quad (1)$$

Trong đó:

$G_c$  - Năng lượng kháng nứt;

$\phi(\theta, \nabla \theta, \rho) = \frac{\theta^2}{2\ell} + \frac{\ell}{2} \rho : (\nabla \theta \otimes \nabla \theta)$  - Hàm mật độ vết nứt;

$\ell$  - Tham số chiều dài mô tả chiều rộng chính tắc của vết nứt;  $\rho = I + \kappa(I - \zeta \otimes \zeta)$  - Ten-xơ định hướng bậc hai với  $\kappa$  là hệ số dị hướng;  $I$  - Ten-xơ đơn vị bậc hai;  $\zeta$  - Vector pháp tuyến với mặt phẳng ưu tiên. Trong nghiên cứu của [2, 5, 7], hàm mật độ năng lượng đàn hồi  $\bar{\Psi}_u$  như:

$$\bar{\Psi}_u = \{\beta(\theta)\} W^+(e^+) + W^-(e^-) \quad (2)$$

Trong (2) sử dụng hàm suy biến  $\beta(\theta) = (1-\theta)^2 + \eta$  với  $\eta$  là số thực vô cùng nhỏ.

Ten-xơ biến dạng  $e$  được phân tích thành phần dương  $e^+$  và phần âm  $e^-$  tương ứng với phần kéo và phần nén sao cho  $e = e^+ + e^-$ . Trong nghiên cứu này, hai thành phần năng lượng đàn hồi  $W^\pm(e^\pm)$  trong (2) được định nghĩa (xem [2, 5, 7]).

Để xác định sự phát triển của biến trường pha  $\theta(x)$  và vector chuyển vị  $u(x)$  trong mô phỏng, ta giải hai hệ phương trình với các điều kiện biên tương ứng như dưới đây:

$$\begin{cases} 2(1-\theta)H - \frac{G_c}{\ell} \delta_\theta \phi(\theta, \nabla \theta, \rho) = 0 & \text{trong } V \\ \theta(x) = 1 & \text{tại } \Gamma \\ \nabla \theta(x) \cdot n = 0 & \text{tại } \partial V \end{cases} \quad (3)$$

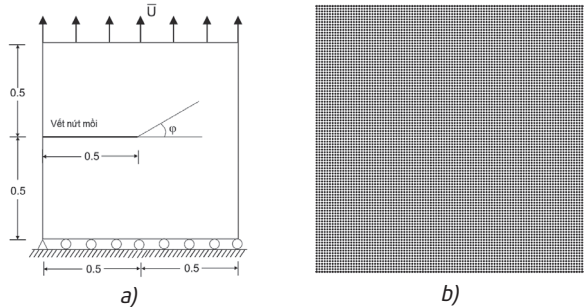
$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma - f = 0 & \text{trong } V \\ u(x) = \bar{u} & \text{tại } \partial V_u \\ \sigma \cdot n = \bar{F} & \text{tại } \partial V_F \end{cases} \quad (4)$$

Trong (3), (4),  $n$  là vector pháp tuyến tại biên  $\partial V$ ;  $f$  và  $\bar{F}$  là lực khối trong vật thể  $V$  và ngoại lực trên biên lực  $\partial V_F$ ;  $\bar{u}$  là chuyển vị tác dụng trên biên chuyển vị  $\partial V_u$ ; và  $\sigma = \frac{\partial \bar{\Psi}_u}{\partial e}$  là ứng suất Cô-si;  $\delta_\theta \phi(\theta, \nabla \theta, \rho) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \ell \{ \Delta \theta (1 + \kappa) - \kappa \zeta \otimes \zeta : \nabla \nabla \theta \} \right]$  là đạo hàm của hàm mật độ vết nứt theo biến trường pha. Trong đó,  $H = \max_{\tau \in [0,1]} \{W^+(x, \tau)\}$  là hàm lịch sử biến dạng theo thời gian  $\tau$ .

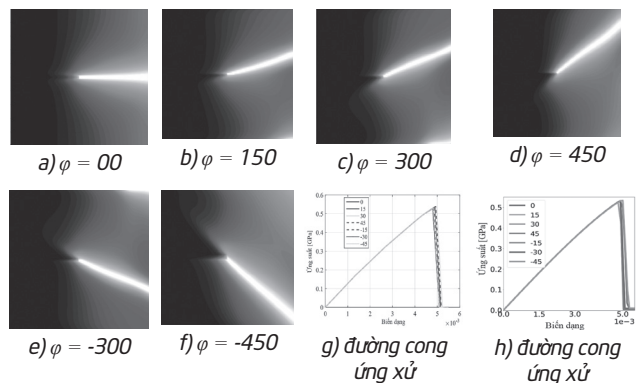
## 3. CÁC VÍ DỤ MÔ PHỎNG

### 3.1. Khảo sát hướng nứt của tấm chịu kéo chứa một pha vật liệu dị hướng

Một tấm chứa một pha vật liệu có kích thước (1x1)mm và vết nứt mỗi 0,5 mm với điều kiện biên được mô tả như Hình 3.1a. Tấm được chia thành 200x200 phần tử vuông tương ứng kích thước lưới  $h = 0,005$  mm (Hình 3.1b). Trong quá trình mô phỏng tấm chịu kéo với chuyển vị không đổi  $\Delta u = 5 \times 10^{-5}$  mm. Mục đích của ví dụ này là khảo sát hướng phát triển vết nứt theo góc ưu tiên  $\varphi$  thay đổi từ  $-45^\circ$  tới  $45^\circ$  bằng phương pháp mô phỏng đề xuất. Sau đó, so sánh kết quả đạt được với kết quả tham chiếu của [13]. Trong [13], các tham số vật liệu của tấm như sau: Các hệ số Lamé  $\lambda = 120$  GPa,  $\mu = 80$  GPa, tham số chiều dài  $\ell = 0,01$  mm, năng lượng kháng nứt  $G_c = 1$  N/mm.



Hình 3.1: Tấm chịu kéo một pha: a) - Kích thước và điều kiện biên; b) - 200x200 lưới phần tử vuông với vết nứt mỗi (đường ngang)

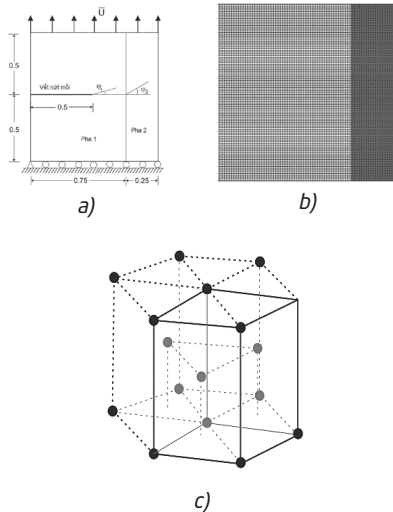


Hình 3.2: So sánh hướng phát triển vết nứt và đường cong ứng xử giữa phương pháp hiện tại (a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) và nghiên cứu [13] (h)

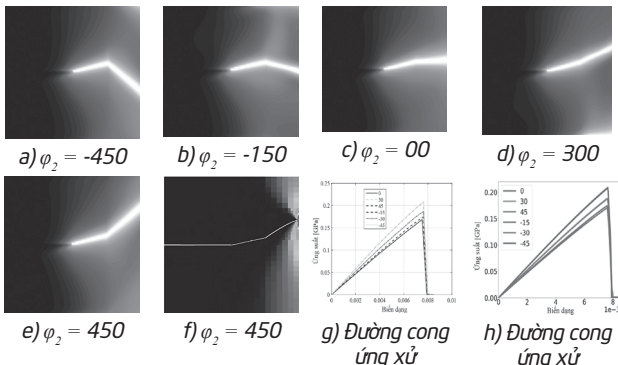
Hình 3.2 là hướng phát triển vết nứt theo hướng ưu tiên  $\varphi$  thay đổi từ  $-45^\circ$  đến  $45^\circ$  của phương pháp mô phỏng hiện tại cũng như so sánh đường cong ứng xử giữa phương pháp hiện tại và [13]. Ta thấy rằng, kết quả tương tự giữa hai phương pháp (với hướng phát triển vết nứt tương ứng được tìm thấy trong [13]). Giá trị ứng suất lớn nhất không đổi và đường cong ứng suất-biến dạng hầu như không đổi khi góc  $\varphi$  thay đổi, bởi đường cong ứng xử là đẳng hướng mà không chịu ảnh hưởng bởi hướng ưu tiên  $\varphi$ . Kết quả đạt được chứng tỏ phương pháp đề xuất là công cụ tốt mô phỏng cho tấm chứa một pha vật liệu dị hướng.

**3.2. Khảo sát hướng nứt của tấm chịu kéo chứa hai pha vật liệu dị hướng**

Ví dụ này khảo sát một tấm chịu kéo chứa hai pha dị hướng như được mô tả trong Hình 3.3a và trong tham chiếu [13]. Trong đó, pha thứ nhất có kích thước  $(1 \times 0,75)$ mm, pha thứ hai có kích thước  $(1 \times 0,25)$ mm, vết nứt mỗi dài 0,5 m và nằm trong pha thứ nhất. Tấm được chia thành  $200 \times 200$  phần tử vuông tương ứng kích thước lưới  $h=0,005$  mm (Hình 3.3b). Trong Hình 3.3b, màu nhạt là pha thứ nhất, màu đậm là pha thứ hai, đường ngang là vết nứt mỗi và đường kẻ đứng là ranh giới giữa hai pha.



Hình 3.3: Tấm chịu kéo hai pha: a) - Kích thước và điều kiện biên; b) -  $200 \times 200$  lưới phần tử vuông: Vết nứt mỗi (đường ngang), pha một (màu nhạt), pha hai (màu đậm), mặt phân giới (kẻ đứng giữa hai pha); c) - Cấu trúc lục giác kín (HCP)



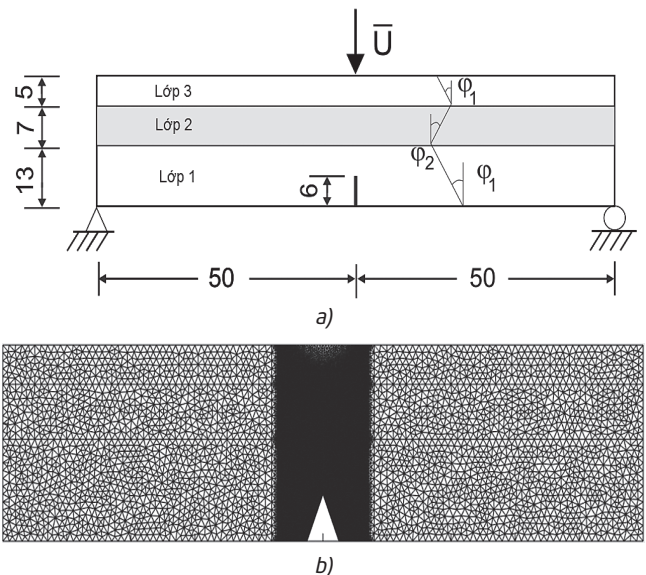
Hình 3.4: So sánh hướng phát triển vết nứt và đường cong ứng xử giữa phương pháp hiện tại (a) (b) (c) (d) (e) (g) và nghiên cứu [13] (f) (h)

Vật liệu hai pha dị hướng được giả định là một cấu trúc lục giác kín (hexagonal close packing (HCP) như Hình 3.3c) với đặc tính vật liệu như sau:  $c_{11} = 115,8$  GPa,  $c_{12} = 39,8$  GPa,  $c_{13} = 40,6$  GPa,  $c_{33} = 51,4$  GPa,  $c_{44} = 20,4$  GPa. Tham số chiều dài  $l = 0,01$  mm, năng lượng kháng nứt trong hai pha và mặt phân giới giữa hai pha được giả định là như nhau và bằng  $G_c = 0,5$  N/mm (xem trong [13]). Trong quá trình mô phỏng tấm chịu kéo với chuyển vị không đổi  $\Delta u = 5 \times 10^{-5}$  mm. Hướng ưu tiên trong pha thứ nhất cố định  $\varphi_1 = 15^\circ$  trong khi pha thứ hai có hướng ưu tiên thay đổi  $\varphi_2$  từ  $-45^\circ$  đến  $45^\circ$  (như Hình 3.3a).

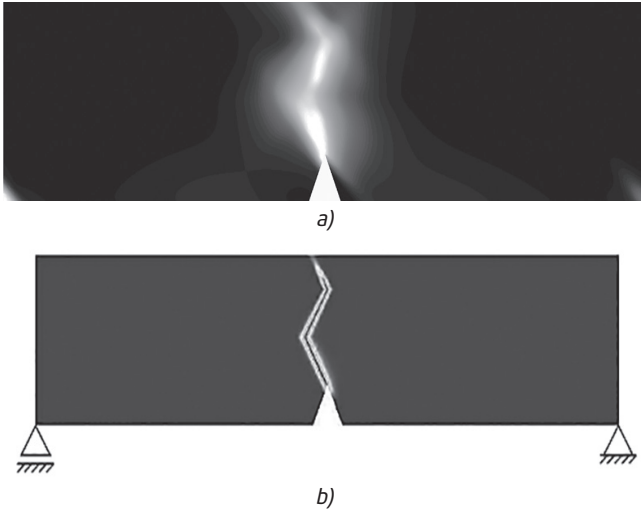
Hình 3.4 là hướng phát triển vết nứt của phương pháp mô phỏng hiện tại, đồng thời so sánh đường cong ứng xử giữa hai phương pháp. Ta thấy rằng kết quả tương tự giữa hai phương pháp (với đường nứt tương ứng được xem trong [13]). Hướng phát triển vết nứt trong pha thứ nhất là giống nhau và tạo với hướng nằm ngang là  $\varphi_1 = 15^\circ$ , khi gặp mặt phân giới giữa hai pha, hướng phát triển vết nứt sẽ đi theo phương ưu tiên  $\varphi_2$  của pha thứ hai. Đường cong ứng xử trước khi xuất hiện vết nứt đầu tiên thay đổi theo hướng ưu tiên  $\varphi_2$  bởi ten-xơ độ cứng đàn hồi của hai pha đều tác động tới ứng suất trung bình trong tấm chứa hai pha này. Do đó, giá trị ứng suất lớn nhất tương ứng với khi xuất hiện vết nứt đầu tiên trong các trường hợp không giống nhau như ví dụ 3.1.

**3.3. Thí nghiệm uốn ba điểm dầm chứa ba lớp vật liệu dị hướng**

Dầm chịu uốn ba điểm với ba lớp vật liệu và điều kiện biên được mô tả như Hình 3.5a. Trong đó, lớp đầu tiên và lớp thứ ba cùng một vật liệu với hướng ưu tiên so với phương thẳng đứng là  $\varphi_1 = -30^\circ$ , trong khi đó lớp thứ hai có hướng ưu tiên với phương đứng là  $\varphi_2 = 30^\circ$ . Lớp đầu tiên, lớp thứ hai và lớp thứ ba có kích thước lần lượt là  $(100 \times 13)$ mm,  $(100 \times 7)$ mm và  $(100 \times 5)$ mm. Vết nứt mỗi của dầm có chiều dài là 6 mm. Trong ví dụ này, dầm được chia lưới tam giác như sau: Tại khu vực vết nứt dự định đi qua với  $h_{min} = 0,35$  mm, khu vực khác  $h_{max} = 1$  mm (Hình 3.5b). Dầm được gia tải với bước chuyển vị  $\Delta u = -1,5 \times 10^{-5}$  mm.



Hình 3.5: Uốn ba điểm dầm chứa ba lớp vật liệu: a) - Kích thước và điều kiện biên của dầm; b) - Chia lưới phần tử cho dầm



Hình 3.6: So sánh hướng phát triển vết nứt giữa phương pháp hiện tại (a) và nghiên cứu [11] (b)

Mục tiêu khảo sát hướng phát triển vết nứt theo hướng ưu tiên của mỗi lớp vật liệu và so sánh kết quả đạt được với nghiên cứu tham chiếu [11]. Trong [11], các tham số vật liệu của dầm như sau: Các hệ số Lamé  $\lambda = 121,15$  GPa,  $\mu = 80,77$  GPa, tham số chiều dài  $l = 0,75$  mm, năng lượng kháng nứt  $G_c = 2,7$  N/mm.

Hình 3.6 so sánh hướng phát triển vết nứt theo phương ưu tiên của từng lớp giữa phương pháp mô phỏng hiện tại và tham chiếu [11]. Các kết quả giữa hai phương pháp là tương tự nhau. Ta thấy rằng vết nứt được hình thành từ vết nứt mỗi và phát triển theo phương ưu tiên của từng lớp trong cả hai phương pháp.

#### 4. KẾT LUẬN

Với ba ví dụ khác nhau nêu trên cho thấy phương pháp hiện tại có thể là một công cụ tốt để mô phỏng hướng phát triển vết nứt và đường cong ứng xử trong kết cấu chứa một hoặc nhiều pha vật liệu dị hướng khác nhau trong các loại kết cấu và điều kiện tải trọng khác nhau.

Ví dụ đầu tiên cho thấy, trong kết cấu chứa một pha dị hướng, hướng nứt trong kết cấu không ảnh hưởng nhiều tới đường cong ứng xử ứng suất-biến dạng.

Trong ví dụ kéo tấm chứa hai pha vật liệu dị hướng, hướng vết nứt chỉ thay đổi trong pha thứ hai trong khi hướng nứt được giữ nguyên trong pha thứ nhất, nhưng đường cong ứng suất- biến dạng thay đổi rõ rệt, trong đó khi  $\varphi_2 = 0^\circ$  ứng suất tương ứng trạng thái bắt đầu nứt là nhỏ nhất so với các trường hợp còn lại. Hơn nữa, khi  $\varphi_2 = -30^\circ$  và  $30^\circ$  cũng như  $\varphi_2 = -45^\circ$  và  $45^\circ$  đường cong ứng xử không thay đổi theo từng cặp.

Ví dụ ba, với việc uốn dầm với ba lớp vật liệu khác nhau, đường nứt vẫn phát triển tốt theo các hướng ưu tiên của từng lớp trong lưu ý mô phỏng hiện tại dùng một biến trường pha, trong khi phương pháp tham chiếu dùng nhiều biến trường pha.

Trong nghiên cứu này chỉ áp dụng trong bài toán hai chiều (2D) và dạng phá hoại I của cơ học phá hủy. Các nghiên cứu tương lai có thể triển khai thêm bài toán ba chiều (3D) và các dạng phá hoại II và III.

**Lời cảm ơn:** Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong Đề tài mã số B2024-GHA-03.

#### Tài liệu tham khảo

- [1]. J. M. Sargado, E.Keilegavlen, I. Berre, J.M. Nordbottenn (2018), *High-accuracy phase-field models for brittle fracture based on a new family of degradation functions*, J. Mech. Phys. Solids, 111, 458-489.
- [2]. B.T. Vu, H. Le-Quang, Q.C. He (2024), *A phase-field method of crack nucleation investigation for experimental validation by using the improved degradation functions and strain orthogonal decompositions*, Appl. Eng. Sci., 17, 100173.
- [3]. G. Z. Voyiadjis, N. Mozaffari (2013), *Nonlocal damage model using the phase field method: theory and applications*, Int. J. Solids Struct. 50 (20-21), 3136-3151.
- [4]. N. Mozaffari, G. Z. Voyiadjis (2015), *Phase field based nonlocal anisotropic damage mechanics model*, Physica D 308, 11-25.
- [5]. B.T. Vu, H. Le-Quang, Q.-C. He (2022), *Modelling and simulation of fracture in anisotropic brittle materials by the phase-field method with novel strain decompositions*, Mech. Res. Commun, 124, 103936.
- [6]. B.T. Vu (2023), *Phase field method with strain orthogonal decompositions for modelling of damage in heterogeneous materials obtained by X-ray computed tomography images*, Transp. commun. Sci. J. 51, 20-34.
- [7]. C. Miehe, M. Hofacker, F. Welschinger (2010), *A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng, 199, 2765-2778.
- [8]. T.T. Nguyen, J. Yvonnet, M. Bornert, C. Chateau, K. Sab, R. Romani, R. Le Roy (2016), *On the choice of parameters in the phase field method for simulating crack initiation with experimental validation*, Int. J. Fracture, 197(2), 213-226.
- [9]. T.T. Nguyen, J. Rethore, M.C. Bainetto (2017a), *Phase-field modelling of anisotropic crack propagation*, Eur. J. Mech. -A/Solids, 65, 279-288.
- [10]. T.T. Nguyen, J. Rethore, J. Yvonnet, M.C. Bainetto (2017b), *Multi-phase-field modeling of anisotropic crack propagation for polycrystalline materials*, Comp. Mech., 60, 289-314.
- [11]. S. Teichtmeister, D. Kienle, F. Aldakheel, M.A. Keip (2017), *Phase-field modeling of fracture in anisotropic brittle solids*, Int. J. Non-Linear Mech., 97, 1-21.
- [12]. J. Bleyer, R. Alessi (2018), *Phase-field modeling of anisotropic brittle fracture including several damage mechanisms*, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., 336, 213-236.
- [13]. S. Zhang, D.U. Kim, W. Jiang, M.R. Tonks (2021), *A phase field model of crack propagation in anisotropic brittle materials with preferred fracture planes*, Comp. Mater. Sci. 193, 110400.

Ngày nhận bài: 13/9/2024

Ngày nhận bài sửa: 01/10/2024

Ngày chấp nhận đăng: 23/10/2024