

Ứng dụng phương pháp tính toán biểu tượng xác định công thức giải tích của phản lực gối đỡ hệ trục tàu thủy

■ TS. CAO ĐỨC THIỆP^(*); ThS. LÊ ĐÌNH DŨNG; ThS. BÙI THỊ HẰNG

Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

Email: ^(*)thiepcd@vimar.edu.vn

TÓM TẮT: Bài báo trình bày phương pháp giải, thuật toán và kết quả thu được khi ứng dụng phương pháp tính toán biểu tượng vào bài toán xác định phản lực gối đỡ hệ trục tàu thủy nhằm tìm được công thức giải tích của phản lực tại các gối đỡ theo các thông số đầu vào. Xuất phát từ mô hình toán viết cho dầm siêu tĩnh nhiều nhịp là kết quả của việc mô hình hóa từ kết cấu thực tế của hệ trục tàu thủy, nhóm tác giả xây dựng một phương pháp giải và thuật toán mới để giải mô hình toán này. Khác với các phương pháp giải đã biết là sử dụng các phương pháp số, phương pháp giải trình bày trong bài báo này sử dụng một phương pháp tính toán mới - phương pháp tính toán biểu tượng.

TỪ KHÓA: Tính toán biểu tượng, công thức giải tích, phản lực gối đỡ hệ trục tàu thủy.

ABSTRACT: The paper presents the solution method, algorithm and obtained results when applying the symbolic computation method to the problem of determining the bearing reaction forces of a ship's shaft system in order to find the analytical formula of the reaction force at the supports in terms of the input parameters. Starting from the mathematical model written for multi-span superstatic beam model which is the result of modeling from the actual structure of the ship's shaft system, the authors built a new solution method and algorithm to solve this mathematical model. Different from known solutions that use numerical methods, the solution method presented in this paper uses a new computation method - Symbolic computation method.

KEYWORDS: Symbolic computation, analytical formula, bearing reaction force of ship's shaft system.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tính toán phản lực tại các gối đỡ là bài toán quan trọng khi tính nghiệm bền hệ trục trong quá trình thiết kế

đóng mới, thiết kế hoán cải hoặc sửa chữa lớn tàu thủy. Hệ phản lực gối đỡ phản ánh mức độ tối ưu của hệ tải trọng tác dụng trên các bạc đỡ cũng như quyết định đến tính làm việc an toàn, tin cậy của hệ trục vừa thiết kế ra, đồng thời cũng cho biết có kéo dài được tuổi thọ của hệ trục hoặc cải thiện được chỉ số thiết kế hiệu quả năng lượng (EEDI - Energy Efficiency Design Index) của tàu hay không.

Theo Quy chuẩn kỹ thuật quốc gia của Việt Nam hiện nay, đường kính các đoạn trục của hệ trục tàu thủy được tính toán theo điều kiện truyền mô-men xoắn [1], sau đó được tính nghiệm lại theo các điều kiện chịu kéo/nén, chịu uốn, chịu xoắn... Trong đó, hệ phản lực tại các gối đỡ cần được xác định thông qua các phương pháp số gần đúng. Do vậy, khi muốn đánh giá ảnh hưởng của một yếu tố nào đó đến hệ phản lực này sẽ phải thực hiện nhiều lần chuỗi công việc: Thiết lập giá trị ban đầu của yếu tố cần xem xét ảnh hưởng → tính toán hệ phản lực gối đỡ → thay đổi giá trị của yếu tố ảnh hưởng → tính toán lại hệ phản lực gối đỡ. Tuy nhiên, các kết quả thu được này cũng thiếu tính trực quan và khó khăn trong phân tích, đánh giá ảnh hưởng của nó.

Trên thế giới hiện nay, phương pháp tính toán biểu tượng (tạm dịch từ thuật ngữ tiếng Anh: Symbolic Computation) đang được nghiên cứu và ứng dụng rộng rãi trong các bài toán kỹ thuật cần các tính toán chính xác cao. Theo phương pháp này, các bài toán kỹ thuật trong thực tế sẽ được tính toán sử dụng biểu tượng xa tới mức có thể, tốt nhất là đưa ra được các công thức giải tích cuối cùng. Căn cứ trên các công thức giải tích đó sẽ có thể phân tích, đánh giá các yếu tố ảnh hưởng một cách chính xác, trực quan hơn hoặc nếu cần thay số thì cũng sẽ cho kết quả số chính xác hơn.

Trong khuôn khổ bài báo này, nhóm tác giả trình bày các căn cứ cũng như kết quả đạt được của việc ứng dụng phương pháp tính toán biểu tượng vào bài toán tính toán phản lực gối đỡ hệ trục tàu thủy nhằm đạt được kết quả chính xác hơn cũng như tạo thuận lợi, dễ dàng trong nghiên cứu các yếu tố ảnh hưởng đến hệ phản lực gối đỡ của hệ trục tàu thủy.

2. XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC GIẢI TÍCH CỦA PHẢN LỰC GỐI ĐỠ HỆ TRỤC BẰNG TÍNH TOÁN BIỂU TƯỢNG

2.1. Giới thiệu phương pháp tính toán biểu tượng

Thực hiện tính toán biểu tượng có nghĩa là sử dụng máy móc, chẳng hạn như máy tính, để xử lý các phương trình và biểu thức toán học ở dạng biểu tượng. Các biểu tượng xuất hiện dưới dạng ký hiệu có thể biểu thị các số như số nguyên, số hữu tỉ, số thực và số phức, các đối tượng toán học như đa thức và hàm số, hệ phương trình và thậm chí các cấu trúc đại số trừu tượng hơn như nhóm, vành và các phần tử của chúng. Các phép tính biểu tượng được thực hiện chính xác theo các quy tắc đại số thay vì sử dụng phép tính gần đúng dấu phẩy động như trong tính toán số. Tính toán biểu tượng nằm ở ranh giới giữa lĩnh vực toán học và khoa học máy tính. Các đối tượng được thao tác là các thực thể toán học, nhưng các ý tưởng thuật toán thường đến từ khoa học máy tính. Nhiều tên gọi khác được sử dụng để chỉ tính toán biểu tượng (Symbolic Computation) trong các tài liệu hiện có như đại số máy tính (Computer Algebra), tính toán biểu tượng và đại số (Symbolic and Algebraic Computation), tính toán toán học biểu tượng (Symbolic Mathematical Computation), tính toán bán số (Semi-numerical Computation), thao tác biểu tượng và đại số (Symbolic and Algebraic Manipulation) và thao tác công thức (Formula Manipulation).

Phần mềm hoặc công cụ thực hiện tính toán biểu tượng được gọi là Hệ thống đại số máy tính (CAS - Computer Algebraic System). CAS hiện đại có thể được chia thành hai nhóm: Hệ thống có mục đích đặc biệt (chuyên dụng) và hệ thống có mục đích chung. CAS có mục đích đặc biệt được thiết kế để giải quyết các vấn đề trong một nhánh cụ thể của vật lý, toán học hoặc kỹ thuật. CAS có mục đích chung được thiết kế để có thể thao tác nhiều loại cấu trúc dữ liệu và đối tượng toán học và thường cố gắng bao quát càng nhiều lĩnh vực ứng dụng khác nhau càng tốt.

Một số CAS có mục đích đặc biệt đã biết được sử dụng trong vật lý và toán học bao gồm: SCHOONSCHIP để sử dụng trong vật lý hạt, CAMAL được sử dụng để tính toán trong cơ học thiên thể và thuyết tương đối rộng, CoCoA được sử dụng trong đại số giao hoán và SINGULAR để sử dụng trong hình học đại số và đại số giao hoán. Trong khi đó, MACSYMA, REDUCE, Maple, Mathematica và MuPAD là những CAS có mục đích chung điển hình và nổi tiếng. Trong đó, MuPAD chính là nhân (Core Engine) của gói công cụ Symbolic Math Toolbox trong MATLAB.

Các khả năng chính của một CAS điển hình có thể được liệt kê như sau [2]:

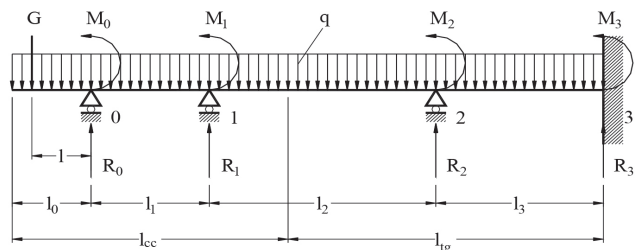
- Thực hiện các phép tính tương tác bằng cách sử dụng Notebook;
- Thực hiện nhiều phép toán, chẳng hạn như đơn giản hóa, nhân tử hóa, mở rộng, lấy vi phân, tích phân, thay thế... dưới dạng biểu tượng;
- Thực hiện các phép tính số với độ chính xác bất kỳ;
- Giải các phương trình đại số cũng như các phương

trình vi phân bằng ký hiệu và số học;

- Thao tác với vector và ma trận;
- Nhập và xuất dữ liệu ở nhiều định dạng khác nhau;
- Vẽ các đồ thị 2D và 3D;
- Thao tác, trực quan hóa và phân tích dữ liệu;
- Chuyển đổi các biểu thức sang nhiều dạng khác nhau;
- Phục vụ như một ngôn ngữ lập trình hiệu quả và trực quan;
- Cho phép sử dụng và phát triển các gói tiện ích bổ sung;
- Có thể được sử dụng như một phương tiện sắp chữ và xuất bản.

2.2. Mô hình toán tính phản lực gối đỡ hệ trục tàu thủy

Mô hình tính phản lực gối đỡ hệ trục tàu thủy được xây dựng từ kết cấu của hệ trục tàu thủy trong thực tế. Trong đó, toàn bộ các trục được mô hình gần đúng bằng một dầm đàn hồi liên tục không có khối lượng. Vị trí của các gối đỡ trong mô hình tính được đặt tại tâm của các gối đỡ hệ trục trong thực tế. Giả thiết hệ trục một tàu thủy được bố trí gồm một đoạn trục chân vịt và một đoạn trục trung gian và trục chân vịt được đỡ trên hai gối đỡ còn trục trung gian được đỡ trên một gối đỡ thì mô hình tính có thể được xây dựng như trên Hình 2.1 [1, 3]. Trong đó, các gối đỡ 0, 1, 2, và 3 tương ứng là gối đỡ sau trục chân vịt, gối đỡ trước trục chân vịt, gối đỡ trục trung gian và bích nối với bích ra của máy chính hoặc hộp số. Sau khi gỡ bỏ liên kết gối đỡ, tại mỗi vị trí này có hai ngoại lực tác dụng, thứ nhất là các mô-men M_i ($i = 0, 1, 2, 3$) và thứ hai là phản lực gối R_i . Trọng lượng của các trục và các thiết bị trên trục như bích nối, bu-lông nối bích... được mô hình gần đúng bằng hệ ngoại lực phân bố dài với cường độ lực phân bố là q , $q = \gamma(\pi d^2)/4$, (kG/cm) với γ là trọng lượng riêng vật liệu trục (kG/cm³) và d là đường kính trục (cm). Trọng lượng G (kG) của chân vịt được coi là lực tập trung đặt tại tâm của củ chân vịt cách gối số 0 một khoảng là l . Như vậy, trên mô hình tính cho trên Hình 2.1 thì các đại lượng q , G , l và các l_i là đã biết. Còn các mô-men uốn M_i và phản lực gối đỡ R_i là các thông số cần tìm.



Hình 2.1: Mô hình tính phản lực gối đỡ hệ trục tàu thủy [1]

Mô hình toán viết cho hệ dầm siêu tĩnh nhiều nhịp được mô hình hóa từ hệ trục một tàu thực tế được xây dựng bằng việc viết các phương trình 3 mô-men cho các gối đỡ của dầm như sau [1]:

$$M_0 = - \left(Gl + \frac{ql_0^2}{2} \right), \quad (1)$$

$$M_0 J_1 + 2M_1 (l_1 + l_2) + M_2 J_2 = - \frac{q}{4} (l_1^3 + l_2^3), \quad (2)$$

$$M_1 J_2 + 2M_2 (l_2 + l_3) + M_3 J_3 = - \frac{q}{4} (l_2^3 + l_3^3), \quad (3)$$

$$ql_3^3 + 4M_2l_3 + 8M_3l_3 = 0, \tag{4}$$

Trong đó: $G, q, l, l_i (i = 0, 1, 2, 3)$ là các thông số đã biết của mô hình tính đã giải thích trên Hình 2.1; $M_i (i = 0, 1, 2, 3)$ là các mô-men uốn tại gối i cần tìm.

Giải mô hình toán từ (1) đến (4) ta sẽ tìm được các mô-men uốn M_i , từ đó cho phép tìm các phản lực gối đỡ R_i theo công thức sau đây:

$$\begin{aligned} R_0 &= (G + ql_0) + \frac{ql_1}{2} + \frac{M_1 - M_0}{l_1} \\ R_1 &= \frac{ql_1}{2} + \frac{ql_2}{2} + \frac{M_2 - M_1}{l_2} - \frac{M_1 - M_0}{l_1} \\ R_2 &= \frac{ql_2}{2} + \frac{ql_3}{2} + \frac{M_3 - M_2}{l_3} - \frac{M_2 - M_1}{l_2} \\ R_3 &= \frac{ql_3}{2} - \frac{M_3 - M_2}{l_3} \end{aligned} \tag{5}$$

2.3. Thuật toán tính toán biểu tượng tìm công thức giải tích của phản lực gối đỡ hệ trục

Mô hình toán sử dụng cho xây dựng thuật toán tính toán biểu tượng tìm công thức giải tích của phản lực gối đỡ hệ trục là hệ phương trình từ (1) đến (5). Trong đó, toàn bộ các thông số của mô hình tính như trọng lượng chân vịt (G), cường độ lực phân bố (q), các chiều dài nhịp l, l_0, l_1, \dots , rồi các ẩn số M_i và R_i đều được khai báo và sử dụng dưới dạng ký hiệu toán học mà không có việc thay số để thành hệ phương trình như là các phương pháp số.

Để có thể lập trình thuận tiện trong MATLAB, mô hình toán của bài toán cần được viết dưới dạng ma trận chính tắc như sau:

$$[A]\{x\} = \{b\}, \tag{6}$$

Trong đó, $[A]$ được gọi là ma trận hệ số của phương trình ma trận. Trong trường hợp đang xét thì các thành phần của ma trận $[A]$ chính là tập hợp các hệ số của phương trình (1) đến (4) và có dạng như sau:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{l_1}{J_1} & 2\left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2}\right) & \frac{l_2}{J_2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{l_{N-2}}{J_{N-2}} & 2\left(\frac{l_{N-2}}{J_{N-2}} + \frac{l_{N-1}}{J_{N-1}}\right) & \frac{l_{N-1}}{J_{N-1}} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{l_{N-1}}{2J_{N-1}} & \frac{l_N}{J_N} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$\{x\}$ - Vector ẩn số của phương trình ma trận. Các thành phần của nó chính là các mô-men uốn M_i cần tìm. Dạng của vector $\{x\}$ như sau:

$$\{x\} = [M_0, M_1, \dots, M_N]^T \tag{8}$$

Còn $\{b\}$ là vector vế phải của phương trình ma trận. Các thành phần của $\{b\}$ là các đại lượng đã biết và dạng của vector $\{b\}$ như sau:

$$\{b\} = \left[-\left(Gl + \frac{ql_0^2}{2}\right), -\frac{1}{4}\left(\frac{ql_1^3}{J_1} + \frac{ql_{i+1}^3}{J_{i+1}}\right), \dots, \frac{ql_N^3}{8J_N} \right]^T, i = 1, 2, \dots, N-1, \tag{9}$$



Hình 2.2: Sơ đồ thuật toán sử dụng tính toán biểu tượng tìm công thức giải tích của phản lực gối đỡ

Căn cứ các phương trình ma trận (9) đến (12) có thể xây dựng thuật toán áp dụng tính toán biểu tượng vào giải hệ phương trình tính phản lực gối đỡ hệ trục tàu thủy như được trình bày trên Hình 2.2. Trong đó, các khối elip là các khối bắt đầu và kết thúc chương trình, các khối hình chữ nhật biểu thị cho một hàm hoặc một thủ tục con được viết trên gói Symbolic Math Toolbox của MATLAB với các hàm và biến dưới dạng ký hiệu, còn các mũi tên thể hiện luồng xúc tiến của chương trình. Chức năng, nhiệm vụ cụ thể của mỗi khối trong sơ đồ khối trên Hình 2.2 cụ thể như sau:

- Khối Bắt đầu là khởi tạo và thực hiện các thủ tục cần thiết cho tính toán phản lực gối đỡ theo phương pháp tính toán biểu tượng;

- Khối Khai báo các thông số của mô hình tính dưới dạng biến ký hiệu có nhiệm vụ sử dụng lệnh khai báo biến ký hiệu của gói Symbolic Math Toolbox trong MATLAB để khai báo các thông số đã biết và các ẩn số của mô hình tính dưới dạng ký hiệu;

- Khối Tính ma trận hệ số $[A]$ có nhiệm vụ tính toán các thành phần của ma trận hệ số $[A]$ sử dụng các phép tính toán ký hiệu. Kết quả thu được cũng là các biểu thức ký hiệu. Cần chú ý rằng, ma trận $[A]$ là ma trận 3 đường chéo chính nên chỉ cần thực hiện tính toán đối với các thành phần khác không nằm trên 3 đường chéo chính, còn các thành phần khác thì bằng 0;

- Khối Tính vector vế phải $\{b\}$ cũng dưới dạng ký hiệu. Cần chú ý rằng với việc khai báo các biến là ký hiệu thì các phép toán cũng sẽ cho ra kết quả là các biểu thức ký hiệu;

- Khối Giải HPT tìm các mô-men M_i ; Khi sử dụng gói công cụ Symbolic Math Toolbox của MATLAB thì thuật toán Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính dạng (9) với ma trận $[A]$ không suy biến dưới dạng ký hiệu cũng đã được tích hợp sẵn vào gói Symbolic Math Toolbox của MATLAB. Các kết quả thu được cũng là những biểu thức ký

hiệu hay các biểu thức giải tích;

- Tiếp theo, khối Tính các phản lực gối đỡ R_i : Thực hiện các phép tính biểu tượng để tính các cái phản lực gối đỡ R_i . Kết quả thu được cũng ở dạng ký hiệu tức là các công thức giải tích của R_i phụ thuộc theo các thông số đầu vào của mô hình tính như G, d, l, l', l'', \dots

3. TÍNH TOÁN VÀ PHÂN TÍCH KẾT QUẢ

Nhóm tác giả đã thực hiện lập trình trên MATLAB với việc sử dụng gói công cụ Symbolic Math Toolbox để thực hiện các tính toán biểu tượng theo thuật toán trình bày trong tiểu mục 3.2. Kết quả thu được với mô hình tính gồm 3 gối đỡ và một đầu ngàm như mô tả trên Hình 2.2 là các biểu thức giải tích của phản lực gối đỡ được trình bày trong các công thức từ (10) đến (13).

$$R_0 = (G + q l_0) + \frac{q l_1}{2} + \frac{(2Gl + q l_0^2)(9l_1 l_2 + 12l_1 l_3 + 8l_2 l_3 + 4l_2^2)}{4l_1(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)} - \frac{q l_1^3(3l_2 + 4l_3) + q l_2^3(l_2 + 4l_3) + q l_2 l_3^3}{4l_1(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)} \quad (10)$$

$$R_1 = \frac{q l_1}{2} + \frac{q l_2}{2} - \frac{(2Gl + q l_0^2)(l_1 + l_2)(5l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 8l_2 l_3 + 4l_2^2)}{4l_1 l_2(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)} + \frac{q l_1^3(l_1 + l_2)(5l_2 + 4l_3)}{8l_1 l_2(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)}, - \frac{q(l_1 + l_2)(2l_1^2 l_2^2 + 2l_1 l_2^3 + 6l_1 l_3^3 - l_2^4 - 4l_2^3 l_3 + 3l_2 l_3^3)}{8l_1 l_2(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)} \quad (11)$$

$$R_2 = \frac{q l_2}{2} + \frac{q l_3}{2} - \frac{(2Gl + q l_0^2)(l_2 + l_3)(l_1 l_2^2 + l_1 l_2 l_3 + 4l_3^2)}{4l_2 l_3^2(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)} - \frac{q l_1^3(l_2 + l_3)(l_2^2 + l_2 l_3 + 4l_3^2)}{8l_2 l_3^2(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)}, + \frac{q l_1(l_2 + l_3)(l_2^4 + l_2^3 l_3 + l_2^2 l_3^2 + 2l_2 l_3^3 + 3l_3^4)}{4l_2 l_3^2(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)} + \frac{q(l_2 + l_3)(l_2^4 l_3 + l_2^3 l_3^2 + 9l_2 l_3^4)}{8l_2 l_3^2(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)} \quad (12)$$

$$R_3 = \frac{q l_3}{2} - \frac{(2Gl + q l_0^2)(l_1 l_2^2 + 2l_1 l_2 l_3)}{4l_3^3(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)} + \frac{q l_1^3(l_2^2 + 2l_2 l_3)}{8l_3^3(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)} - \frac{q l_1(l_2^4 + 2l_2^3 l_3 + 3l_2 l_3^2 + 5l_3^4)}{4l_3^3(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)} - \frac{q(l_2^5 + 2l_2^4 l_3 + 5l_2^3 l_3^2 + 10l_2 l_3^4)}{8l_3^3(3l_1 l_2 + 4l_1 l_3 + 4l_2 l_3 + 2l_2^2)} \quad (13)$$

Các công thức (10) đến (13) chính là các công thức giải tích xác định phản lực tại các gối đỡ hệ trục. Có thể thấy rằng phản lực tại tất cả các gối đỡ đều là hàm số phụ thuộc theo các tham số ban đầu của mô hình tính, tức là đều phụ thuộc vào trọng lượng chân vịt G , cường độ lực phân bố q , các chiều dài nhịp l, l', l'', \dots . Cụ thể, trọng lượng chân vịt G xuất hiện ở tất cả các công thức tính phản lực tại các gối đỡ, tức là nó ảnh hưởng tới tất cả phản lực tại các gối đỡ, trong đó ảnh hưởng tới gối số 0 (tức gối đỡ sau trục chân vịt) là nhiều nhất. Trong khi cường độ lực phân bố q cũng ảnh hưởng tới phản lực tại tất cả các gối đỡ, tuy nhiên, ảnh hưởng dần đều tại tất cả các gối đỡ này. Tương tự như

vậy, chiều dài các nhịp trục cũng xuất hiện như là tham số trong tất cả các công thức giải tích của các phản lực gối đỡ. Tuy nhiên, để đánh giá định lượng ảnh hưởng của chúng đến phản lực gối đỡ cần khảo sát cẩn thận các hàm số từ (10) đến (13) theo từng biến số là các tham số đầu vào của mô hình tính. Các nghiên cứu sâu hơn này sẽ được trình bày trong một nghiên cứu khác của nhóm tác giả.

4. KẾT LUẬN

Từ phương pháp tính toán và các kết quả trình bày trên đây có thể đưa ra một số kết luận sau:

- Hoàn toàn có thể ứng dụng phương pháp tính toán biểu tượng vào bài toán tính phản lực gối đỡ hệ trục tàu thủy để nhận được các công thức giải tích của phản lực gối đỡ theo các tham số đầu vào của mô hình tính;
- Phương pháp tính toán biểu tượng cho kết quả là các công thức giải tích của phản lực tại các gối đỡ của hệ trục tàu thủy. Có thể coi chúng như các hàm số theo các biến là các tham số đầu vào. Điều này cho phép khảo sát các hàm số này để phân tích, đánh giá các yếu tố ảnh hưởng đến phân bố phản lực gối đỡ của hệ trục một cách dễ dàng, trực quan hơn các phương pháp số hiện có.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Hàng hải Việt Nam trong Đề tài mã số DT23-24.12.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Cao Đức Thiệp, Lê Đình Dũng, Trương Tiến Phát (2021), *Nghiên cứu xây dựng phần mềm tự động tính toán thiết kế hệ trục tàu thủy lập trình trên phần mềm MATLAB*, Đề tài NCKH cấp Cơ sở mã số DT20-21.17.
- [2]. R. A. Walentynski (2003), *Application of computer algebra in symbolic computations and boundary-value problems of the theory of shells*, Number PL ISSN 0434-0779, Wydawnictwo Politechniki Slaskiej, Gliwice.
- [3]. Lê Đình Dũng, Cao Đức Thiệp, Bùi Thị Hằng (2023), *Xây dựng phương pháp tính toán định tâm hệ trục tàu thủy cỡ lớn khi kể đến ảnh hưởng của biến dạng thân tàu*, Đề tài NCKH cấp Cơ sở, mã số DT22-23.15.
- [4]. Lê Đình Dũng, Cao Đức Thiệp, Bùi Thị Hằng (2023), *Tính toán định tâm hệ trục tàu thủy cỡ lớn khi kể đến ảnh hưởng của biến dạng thân tàu*, Tạp chí GTVT, số tháng 8, tr.78-81, Hà Nội.

Ngày nhận bài: 22/3/2024
Ngày nhận bài sửa: 11/4/2024
Ngày chấp nhận đăng: 25/4/2024