

Phương pháp trường pha sử dụng họ hàm suy biến cải tiến dự đoán tải trọng giới hạn gây phá hoại vật liệu giòn

■ TS. VŨ BÁ THÀNH^(*)

Trường Đại học Giao thông vận tải

■ KS. NGUYỄN BÁ PHONG; TS. VŨ MINH NGẠN

Trường Đại học Mở - Địa chất

Email: ^(*)thanhvb@utc.edu.vn

TÓM TẮT: Gần đây, phương pháp trường pha được sử dụng để mô phỏng hư hỏng trong các kết cấu phức tạp. Phương pháp này gồm hai yếu tố quan trọng là tham số chiều dài và hàm suy biến chứa biến trường pha để mô tả sự suy giảm năng lượng và trạng thái hư hỏng của kết cấu khi chịu các tác động của tải trọng. Trong đó, tham số chiều dài được xác định thông qua các đặc tính vật liệu trong kết cấu. Hầu hết các nghiên cứu trước đây đều sử dụng hàm suy biến bậc hai dẫn đến tham số chiều dài là một giá trị cố định và nhỏ. Điều này làm cho kích thước lưới phần tử của kết cấu nhỏ, dẫn tới thời gian mô phỏng lớn. Do đó, bài báo sử dụng phương pháp trường pha với một họ hàm suy biến cải tiến để mô phỏng hư hỏng trong vật liệu thực tế là thạch cao. Một vài ví dụ mô phỏng bằng việc thay đổi giá trị của tham số chiều dài được thực hiện. Các kết quả đạt được phù hợp với kết quả phân tích lý thuyết của các nghiên cứu trước đó. Điều này chứng tỏ việc sử dụng hàm suy biến cải tiến để xuất, kích thước lưới phần tử sẽ lớn hơn và thời gian mô phỏng giảm đi mà không làm thay đổi sự phát triển của đường nứt và đường cong ứng xử vật liệu.

TỪ KHÓA: Phương pháp trường pha, hàm suy biến, vật liệu giòn, đường cong ứng xử, vết nứt.

ABSTRACT: In recent times, phase field methods are used to simulate the damage in complex structures. This method consists of two important components, namely the length parameter and the degradation function containing the phase field variable to describe the energy minimization and damage state of the structure subjected to the effects of loads. In which, the length parameter is determined through the material properties in the structure. Most of the previous works used a quadratic degradation function, which resulted in the length parameter being a fixed and small value. In order to overcome this shortcoming, this paper uses the phase field method with an improved family of degradation functions to simulate damage in the realistic material, namely plaster. Some simulation examples by changing the value of the length

parameter are introduced. The obtained results are in good agreement with the theoretical analysis results of previous studies. This proves that the use of the present improved degradation functions, the mesh size will be larger and the simulation cost will be reduced without changing the crack development and material behavior curve.

KEYWORDS: Phase field method, degradation function, brittle materials, material behavior curve, crack.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Mô phỏng sự phát triển vết nứt trong các vật liệu giòn bằng phương pháp mô phỏng là cần thiết để dự đoán giá trị tải trọng tới hạn. Chủ đề này đã được nghiên cứu rộng rãi kể từ các lý thuyết cơ học phá hủy [1, 2] xuất hiện. Tuy nhiên, mô phỏng hư hỏng kết cấu vẫn là một trong những thách thức lớn. Từ khó khăn này, [3] đã đề xuất phương pháp biến phân dựa trên lý thuyết giảm thiểu năng lượng trong vật thể để xác định sự khởi tạo và lan truyền vết nứt. Sau đó, [4] đã phát triển phương pháp mô phỏng để mô tả các vết nứt phức tạp và là nền tảng của phương pháp trường pha.

Phương pháp trường pha với việc sử dụng biến trường pha và hàm suy biến để mô tả sự suy giảm năng lượng và trạng thái hư hỏng trong vật thể dựa vào quá trình giải kết hợp biến trường pha và chuyển vị. Trong đó, biến trường pha là một đại lượng vô hướng có giá trị thay đổi từ 0 tới 1 và hàm suy biến của biến trường pha này là khả năng. Khi sử dụng phương pháp này, năng lượng trong vật thể gồm năng lượng để tạo ra hai bề mặt của vết nứt phụ thuộc vào biến trường pha và năng lượng biến dạng đàn hồi liên quan biến chuyển vị và hàm suy biến. Chính nhờ vậy, phương pháp này không cần mô tả trước vị trí hình thành vết nứt mà cho phép mô tả hiện tượng phân nhánh phức tạp hoặc liên kết giữa các vết nứt độc lập.

Các nghiên cứu sử dụng phương pháp trường pha [5-8] đã chỉ ra rằng hàm suy biến và tham số chiều dài l là các yếu tố rất quan trọng của phương pháp. Nhưng, các nghiên cứu này đã sử dụng một hàm suy biến bậc hai dẫn tới giá trị tham số chiều dài l bị cố định như được tìm thấy trong [9]. Điều này dẫn tới khi cho giá trị l khác nhau sẽ làm cho kết quả đạt được sẽ thay đổi, nhất là đường cong ứng xử vật liệu. Xuất

phát từ nhược điểm trên, nghiên cứu [10] đã phát triển một hàm suy biến cải tiến có thể giúp cho việc dự đoán chính xác giá trị của tải trọng tới hạn khi thay đổi các giá trị của l . Điều này là quan trọng vì khi l tăng sẽ dẫn tới kích thước lưới phần tử sẽ tăng lên giúp giảm thời gian mô phỏng.

Do đó, trong nghiên cứu này, phương pháp trường pha kết hợp hai dạng hàm suy biến: (i) dạng hàm suy biến bậc hai trong [5-9] và (ii) họ hàm suy biến của [10] để mô phỏng hư hỏng của vật liệu giòn, đồng nhất trong [11]. Sau đó, việc so sánh và thảo luận các kết quả đạt được sẽ chứng minh các ưu điểm của việc sử dụng họ hàm của [10] như tham số l có thể được tăng lên nhưng không ảnh hưởng tới kết quả và tải trọng tới hạn được xác định chính xác khi so sánh với kết quả tính toán lý thuyết [12].

2. PHƯƠNG PHÁP TRƯỜNG PHA VỚI HỌ HÀM SUY BIẾN CẢI TIẾN

2.1. Các phương trình năng lượng

Xét miền Ω là một vật thể bị nứt, với $\partial\Omega$ là biên ngoài của Ω . Cho Γ là vết nứt trong Ω . Trạng thái của vết nứt được mô tả bằng một biến trường pha $d(x)$ với $x \in \Omega$. Trong phương pháp trường pha, tổng năng lượng trong miền Ω là:

$$E(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} W_u(\boldsymbol{\varepsilon}, d) d\Omega + \int_{\Omega} g_c \gamma(d, \nabla d) d\Omega \quad (1)$$

Trong đó: g_c - Năng lượng kháng nứt; $\gamma(d, \nabla d) = \frac{d^2}{2l} + \frac{1}{2} \nabla d \cdot \nabla d$ - Hàm mật độ vết nứt, l - Tham số chiều dài. Trong [9], hàm mật độ năng lượng đàn hồi W_u như:

$$W_u(\mathbf{u}, d) = \Psi^+(\boldsymbol{\varepsilon}) \{ \beta(d) + \kappa \} + \Psi^-(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2)$$

Biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}$ được phân tích thành $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ và $\boldsymbol{\varepsilon}^-$ tương ứng với phần kéo và phần nén: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^-$ (3)

Trong nghiên cứu này, hai thành phần năng lượng $\Psi^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon})$ trong (2) liên quan tới $\boldsymbol{\varepsilon}^-$ và $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ được mô tả trong [9]:

$$\Psi^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda}{2} \left(\langle Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_{\pm} \right)^2 + \mu Tr \{ (\boldsymbol{\varepsilon}^{\pm}) \}^2 \quad (4)$$

Bài báo này phân tích hai dạng hàm suy biến đơn điệu tăng $\beta_1(d)$ và $\beta_2(d)$. Hai dạng hàm này thỏa mãn các điều kiện như sau:

$$\begin{cases} \beta(d) = 1 \text{ khi } d = 0 \\ \beta(d) = 0 \text{ khi } d = 1 \\ \beta'(d) < 0 \quad \forall d < 1 \\ \beta'(d) = 1 \text{ khi } d = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Dạng hàm suy biến thứ nhất được sử dụng rộng rãi trong [5-9]: $\beta_1(d) = (1 - d)^2$ (6)

Dạng thứ hai, họ hàm suy biến cải tiến trong [10] như sau:

$$\beta_2(d; \xi; n; \omega) = (1 - \omega) \frac{1 - e^{-\xi(n)(1-d)^n}}{1 - e^{-\xi(n)}} + \omega \phi_c(d) \quad (7)$$

Trong đó: ξ , n và ω - Các số thực sao cho $\xi > 0$, $n \geq 2$ và $\omega \in [0; 1]$. Nghiên cứu [10] đã sử dụng $\omega = 0, 1$. Hàm $\phi_c(d)$ là một số hạng hiệu chỉnh với các điều kiện $\phi_c(0) = 1$ và $\phi_c(d) > 0$ tại các giá trị cụ thể của d .

Sự phát triển của biến trường pha $d(x)$ được xác định bằng cách giải hệ phương trình dưới đây (xem [9]):

$$\begin{cases} \beta'(d)H + \frac{g_c}{l}(d - l^2 \Delta d) = 0 & \text{in } \Omega \\ d(\mathbf{x}) = 1 & \text{on } \Gamma \\ \nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

Với \mathbf{n} là vector pháp tuyến tại biên $\partial\Omega$ và Δd là toán tử Laplace của $d(x)$ và H là hàm lịch sử biến dạng theo thời gian τ được xác định như sau:

$$H = \max_{\tau \in [0, t]} \{ \Psi^+(\mathbf{x}, \tau) \} \quad (9)$$

Với tổng năng lượng E trong vật thể bị nứt từ công thức (1) với chuyển vị \mathbf{u} , dạng yếu của bài toán chuyển vị được viết:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W_u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} \bar{\mathbf{F}} \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (10)$$

Trong đó: \mathbf{f} và $\bar{\mathbf{F}}$ - Nội lực trong vật thể Ω và ngoại lực trên biên $\partial\Omega_f$.

Với phương trình (10) của hàm năng lượng biến dạng, ứng suất Cô-si được xác định:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W_u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \{ g(d) + \kappa \} \{ \lambda \langle Tr \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{+} \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^{+} \} + \lambda \langle Tr \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{-} \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^{-} \quad (11)$$

2.2. Xác định tham số chiều dài l

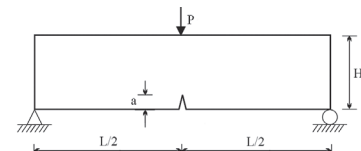
Trong tất cả các ví dụ trong nghiên cứu này, ta sử dụng các tham số vật liệu thạch cao trong [11] như sau: $E = 12$ GPa, $\nu = 0,3$, $g_c = 1,4$ N/m và $\sigma_c = 3,9$ Mpa. Giả thiết sử dụng điều kiện biến dạng phẳng.

Theo [12], ta có các quan hệ của $\left(d; \boldsymbol{\varepsilon} \sqrt{\frac{E}{g_c}} \right)$. Từ đó, ta tìm được giá trị giới hạn σ_c của ứng suất theo d . Giá trị σ_c đạt được tương ứng với giá trị lớn nhất của $\boldsymbol{\sigma} \sqrt{\frac{E}{g_c}}$. Do đó, khi sử dụng hàm (6), ta tìm được giá trị $d = \frac{1}{4}$ tương ứng với σ_c sau đó ta có thể xác định được l như trong [12] là $l = \frac{27 E g_c}{256 (\sigma_c)^2}$. Tương tự, ta có thể xác định được giá trị của d tương ứng với giá trị lớn nhất của $\boldsymbol{\sigma} \sqrt{\frac{E}{g_c}} = \sigma_c \sqrt{\frac{E}{g_c}}$ với mỗi hàm $\beta_2(d)$ xác định được từ (7) theo tham số n , sau đó ta có thể xác định được giá trị l tương ứng (xem [10]). Như vậy, với mỗi giá trị của n ta có thể tìm được giá trị của l . Do đó, ta có thể tìm được các giá trị khác nhau của l mà không ảnh hưởng nhiều tới kết quả tìm được của σ_c , điều mà hàm $\beta_1(d)$ chỉ tìm được duy nhất một giá trị $l = \frac{27 E g_c}{256 (\sigma_c)^2}$. Theo [9, 12], ta có điều kiện $l \geq 2h_{min}$ với h_{min} là kích thước lưới khu vực vết nứt dự định đi qua, do đó khi sử dụng $\beta_2(d)$, giá trị l lớn sẽ cho phép kích thước lưới h_{min} tăng lên, dẫn tới số lượng phần tử trong kết cấu sẽ giảm đi. Điều này giúp thời gian mô phỏng giảm trong khi kết quả không thay đổi.

3. CÁC VÍ DỤ MÔ PHỎNG

3.1. Thí nghiệm uốn 3 điểm

Dầm chịu uốn ba điểm có điều kiện biên như Hình 3.1. Dầm được gia tải với bước chuyển vị không đổi $\Delta u = -1.5 \times 10^{-5}$ mm.



Hình 3.1: Kích thước và điều kiện biên

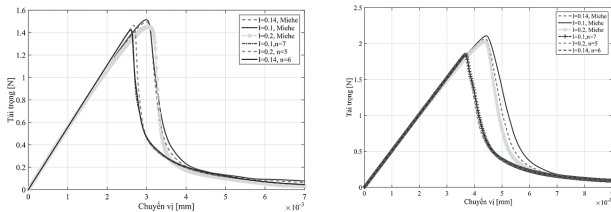
Mục tiêu là khảo sát đường nứt, ứng xử và giá trị lực tới hạn P_c của: (i) dầm $L \times H = (8 \times 2)$ mm với $a = 0,4$ mm và (ii) dầm $L \times H = (16 \times 4)$ mm có $a = 0,8$ mm với các cặp giá trị $[n, l] = [7; 0,1 \text{ mm}]$; $[6; 0,14 \text{ mm}]$ và $[5; 0,2 \text{ mm}]$ khi sử dụng $\beta_2(d)$, sau đó khảo sát với các giá trị $l = 0,1 \text{ mm}$; $0,14 \text{ mm}$ và $0,2 \text{ mm}$ và sử dụng với $\beta_1(d)$. Đặc biệt, các giá trị P_c được so sánh với

kết quả phân tích theo Tada [13] để kiểm chứng sự chính xác của phương pháp trường pha với hàm $\beta_2(d)$.

Hình 3.2a và Hình 3.2b thể hiện đường nứt hai dầm (8x2)mm và (16x4)mm tương ứng. Hình 3.3a và Hình 3.3b so sánh ứng xử tương ứng của hai loại dầm với các giá trị của l khi sử dụng (6) và (7). Ta thấy rằng khi sử dụng hàm (7), giá trị P_c là tương đối giống nhau khi l thay đổi. Trong khi đó, các giá trị P_c khác nhau khi l thay đổi với việc sử dụng hàm suy biến (6). Hơn nữa, khi sử dụng (7), đường cong quan hệ phát triển tuyến tính tới khi xuất hiện vết nứt đầu tiên. Điều này rất phù hợp với vật giòn đồng nhất được sử dụng trong bài báo. Trong khi sử dụng (6), các đường cong này không tuyến tính tới khi xuất hiện vết nứt.



Hình 3.2: Đường lan truyền vết nứt: a) - Dầm (8x2)mm; b) - Dầm (16x4)mm



Hình 3.3: So sánh đường cong ứng xử khi thay đổi l với hai hàm $\beta_1(d)$ và $\beta_2(d)$ của: (a) dầm (8x2)mm; (b) dầm (16x4)mm

Theo nghiên cứu của [13] được dùng để tính toán P_c của một số kết cấu điển hình. Một dầm LxH với vết nứt a như Hình 3.1 được xác định P_c như sau:

$$K_{IC} = \frac{3LP_c}{2H^2} \sqrt{\pi a} F(\alpha), \quad \alpha = \frac{a}{H} \quad (12)$$

Với dầm có $L = 4H$, ta tính được hệ số:

$$F(\alpha) = \frac{1,99 - \alpha(1-\alpha)(2,15 - 3,93\alpha + 2,7\alpha^2)}{(1 + 2\alpha)(1-\alpha)^{3/2} \sqrt{\pi a}}$$

Với hai dầm được mô phỏng trên thì tỷ lệ $\alpha = \frac{a}{H} = 0,2$, do đó, ta tính $F(\alpha) = 0,955$. Theo [10], cường độ kháng nứt là $K_{IC} = \sqrt{\frac{Eg_{cr}}{1-\nu^2}} = 4,3 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$. Từ đó, giá trị P_c theo [13] cho dầm LxH = (8x2)mm và (16x4)mm như Bảng 3.1:

Bảng 3.1. Lực tới hạn tính P_c theo [13]

Dầm LxH	Cường độ kháng nứt K_{IC} (MPa $\sqrt{\text{mm}}$)	Lực tới hạn P_c (N)
8x2 mm	4,3	1,338
16x4 mm	4,3	1,892

Bảng 3.2 và Bảng 3.3 so sánh P_c theo [13] với hai hàm $\beta_1(d)$ và $\beta_2(d)$ và các giá trị của l cho dầm (8x2)mm và (16x4)mm:

Bảng 3.2. So sánh P_c theo [13] với $\beta_1(d)$ và $\beta_2(d)$ của dầm (8x2)mm

l (mm)	P_c (N) theo [13]	P_c (N) theo $\beta_1(d)$	Sai số 1 (SS1) (%)	P_c (N) theo $\beta_2(d)$	Sai số 2 (SS2) (%)
0,1	1,338	1,514	11,62	1,425	6,11
0,14	1,338	1,495	10,50	1,422	5,91
0,2	1,338	1,452	7,85	1,451	7,79

Từ Bảng 3.2 và Bảng 3.3, các sai số SS1 của P_c theo $\beta_1(d)$ so với kết quả tính theo [13] biến động lớn khi thay đổi l ,

trong khi sai số SS2 của P_c theo $\beta_2(d)$ so với [13] không thay đổi nhiều. Hơn nữa, các sai số SS1 thường lớn hơn SS2 và sai số SS2 có giá trị nhỏ. Điều này chứng tỏ khi thay đổi giá trị của tham số chiều dài l không làm thay đổi giá trị P_c theo $\beta_2(d)$ và kết quả đạt được này rất giống với kết quả tính theo [13]. Do đó, phương pháp trường pha với việc sử dụng $\beta_2(d)$ có thể dự đoán được P_c và đường nứt của dầm uốn ba điểm với chiều dài vết nứt mỗi thay đổi theo mô tả trong [13].

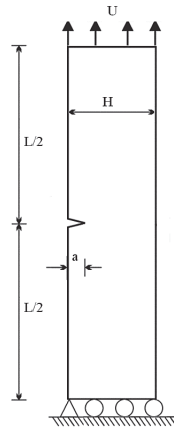
Bảng 3.3. So sánh P_c theo [13] với $\beta_1(d)$ và $\beta_2(d)$ của dầm (16x4)mm

l (mm)	P_c (N) theo [13]	P_c (N) theo $\beta_1(d)$	Sai số 1 (SS1) (%)	P_c (N) theo $\beta_2(d)$	Sai số 2 (SS2) (%)
0,1	1,892	2,107	10,20	1,868	1,28
0,14	1,892	2,065	8,38	1,846	2,49
0,2	1,892	2,026	6,61	1,848	2,38

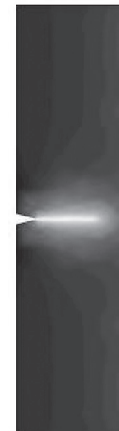
3.2. Thí nghiệm kéo một tấm có vết nứt môi

Một tấm có kích thước LxH = (8x2)mm với $a = 0,4$ mm có điều kiện biên như Hình 3.4. Tấm được gia tải với bước chuyển vị không đổi $\Delta u = 10^{-5}$ mm.

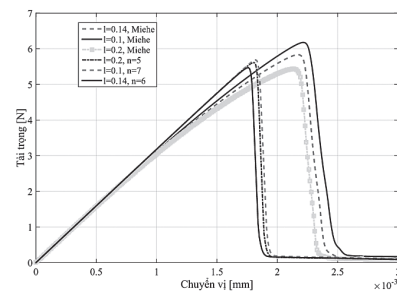
Tương tự ví dụ 3.1, ta khảo sát đường nứt, đường cong quan hệ và P_c của tấm với các cặp giá trị $[n, l] = [7; 0,1 \text{ mm}]$; $[6; 0,14 \text{ mm}]$ và $[5; 0,2 \text{ mm}]$ khi sử dụng $\beta_2(d)$ và $l = 0,1 \text{ mm}$; $0,14 \text{ mm}$ và $0,2 \text{ mm}$ khi sử dụng với $\beta_1(d)$. Sau đó, giá trị P_c được so sánh với kết quả tính theo [13], từ đó đưa ra các nhận định khi sử dụng phương pháp trường pha với hàm $\beta_2(d)$.



Hình 3.4: Kích thước và điều kiện biên



Hình 3.5: Đường lan truyền vết nứt



Hình 3.6: So sánh đường cong ứng xử khi thay đổi l với hai hàm $\beta_1(d)$ và $\beta_2(d)$

Hình 3.5 mô tả đường nứt của tấm chịu kéo. Hình 3.6 so sánh ứng xử với các giá trị của l khi sử dụng hai hàm (6) và

(7). Ta thấy rằng, các giá trị của P_c tương đối giống nhau khi l thay đổi khi sử dụng hàm (7). Phần đường cong trước khi đạt được P_c tương ứng với (7) là đường thẳng tuyến tính trong khi phần đường cong này tương ứng với (6) không phát triển tuyến tính. Nhưng góc nghiêng ở phần đầu của tất cả các đường cong quan hệ là giống nhau khi sử dụng (6) và (7), chứng tỏ ban đầu khi kết cấu chưa bị phá hủy thì độ cứng đàn hồi của kết cấu phát triển giống nhau.

Theo [13], đối với tấm như Hình 3.4, cường độ kháng nứt K_{IC} được xác định như sau:

$$K_{IC} = \frac{P_c}{H} \sqrt{\pi a} F(\alpha), \quad \alpha = \frac{a}{H} \quad (13)$$

Ta tính được hệ số:

$$F(\alpha) = 1,122 - 0,231\alpha + 10,55\alpha^2 - 21,71\alpha^3 + 30,38\alpha^4.$$

Với $\alpha = \frac{a}{H} = 0,2$ theo (18) thì $F(\alpha) = 1,373$ và cường độ kháng nứt của vật liệu được tính tương tự ví dụ 3.1 với

$$K_{IC} = \sqrt{\frac{Eg_c}{1-\nu^2}} = 4,3 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}.$$

Từ đó, ta có thể xác định P_c theo [13] cho tấm và xác định được sai số của P_c khi so sánh kết quả theo [13] và theo phương pháp trường pha với hai dạng hàm (6) và (7) như Bảng 3.4.

Bảng 3.4. So sánh P_c theo [13] với phương pháp trường pha sử dụng $\beta_1(d)$ và $\beta_2(d)$

l (mm)	P_c (N) theo [13]	P_c (N) theo $\beta_1(d)$	Sai số 1 (SS1) (%)	P_c (N) theo $\beta_2(d)$	Sai số 2 (SS2) (%)
0,1	5,584	6,174	9,56	5,686	1,79
0,14	5,584	5,833	4,27	5,467	2,14
0,2	5,584	5,432	2,80	5,611	0,48

Từ Bảng 3.4 ta thấy rằng, các sai số SS1 của phương pháp trường pha với $\beta_1(d)$ so với kết quả tính theo [13] thay đổi nhiều tương ứng với các giá trị khác nhau của l . Sai số SS2 của P_c theo $\beta_2(d)$ so với [12] không bị biến động nhiều và có giá trị nhỏ. Điều này chứng tỏ khi thay đổi l thì P_c theo $\beta_2(d)$ không bị thay đổi và rất giống với kết quả tính theo [13].

4. KẾT LUẬN

Với các kết quả đạt được từ phân tích trong Mục 2.2 và các ví dụ dầm uốn ba điểm và tấm chịu kéo, chứng tỏ phương pháp trường pha với việc sử dụng họ hàm suy biến $\beta_2(d)$ trong (7) có thể dự đoán được chính xác sự phát triển của đường nứt, đường cong ứng xử và lực tới hạn P_c gây nứt khi so sánh với kết quả lý thuyết theo [13]. Các kết quả này không bị phụ thuộc vào các giá trị được khảo sát trong bài báo của tham số chiều dài l . Trong khi đó, việc sử dụng hàm suy biến $\beta_1(d)$ của (6) thì kết quả đường cong ứng xử và giá trị P_c bị biến động mạnh, hay nói cách khác là giá trị của l càng lớn thì giá trị của P_c càng nhỏ và vết nứt xuất hiện càng sớm. Do đó, việc sử dụng hàm suy biến cải tiến $\beta_2(d)$ giúp tăng giá trị l dẫn tới việc giảm số lượng phần tử trong kết cấu và từ đó làm giảm thời gian mô phỏng.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong Đề tài mã số B2024-GHA-03.

Tài liệu tham khảo

- [1]. G.A. Griffith (1921), *The phenomena of rupture and flow in solid*, Philosophical Transaction of the Royal Society London Series A. 221, 163-198.
- [2]. G.R. Irwin (1957), *Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate*, J. Appl. Mech, 24, 361-364.
- [2]. G.R. Irwin (1957), *Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate*, J. Appl. Mech, 24, 361-364.
- [3]. G.A. Francfort, J.J. Marigo (1998), *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*, J. Mech. Phys. Solids, 46, 1319-1342.
- [4]. B. Bourdin, J.J. Marigo, C. Maurini, P. Sicsic (2014), *Morphogenesis and propagation of complex cracks induced by thermal shocks*, Phys. Rev. Lett, 112, 014301.
- [5]. F. Freddi, C. Royer Carfagni (2010), *Regularized variational theories of fracture: a unified approach*, J. Mech. Phys. Solids, 58, 1154-1174.
- [6]. K. Pham, J.J. Marigo, C. Maurini (2011b), *The issues of the uniqueness and the stability of the homogeneous response in uniaxial tests with gradient damage models*, J. Mech. Phys. Solids, 59(6), 1163-1190.
- [7]. G. Del Piero (2013), *A variational approach to fracture and other inelastic phenomena*, J. Elasticity, 112(1), 3-77.
- [8]. K. Pham, J.J. Marigo (2010), *Approche variationnelle de l'endommagement: I. Les concepts fondamentaux*, The variational approach to damage: I. The foundation. C.R. Mécanique, 338(4), 191-198.
- [9]. C. Miehe, M. Hofacker, F. Welschinger (2010), *A phase field model for rate-independent crack propagation: robust algorithmic implementation based on operator splits*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng, 199, 2765-2778.
- [10]. J. M. Sargado, E. Keilegavlen, I. Berre, J.M. Nordbottenn (2018), *High-accuracy phase-field models for brittle fracture based on a new family of degradation functions*, J. Mech. Phys. Solids, 111, 458-489.
- [11]. R. Romani, M. Bornert, D. Leguillon, R.L. Roy, K. Sab (2015), *Detection of crack onset in double cleavage drilled specimens of plaster under compression by digital image correlation: theoretical predictions based on a coupled criterion*, Eur. J. Mech. A Solids, 51, 172-182.
- [12]. H. Tada, P.C. Paris, G.R. Irwin (2000), *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 3rd edition, ASME Press, New York.
- [13]. T.T. Nguyen, J. Yvonnet, M. Bornert, C. Chateau, K. Sab, R. Romani, R. Le Roy (2016), *On the choice of parameters in the phase field method for simulating crack initiation with experimental validation*, Int. J. Fracture, 197(2), 213-226.

Ngày nhận bài: 12/01/2024

Ngày nhận bài sửa: 24/01/2024

Ngày chấp nhận đăng: 05/02/2024