

PHÂN TÍCH TÍNH TẮM SANDWICH FGM XỐP ĐẶT TRÊN NỀN ĐÀN HỒI WINKLER/PASTERNAK/KERR

Nguyễn Thanh Hải, Dương Thành Huân*, Lê Vũ Quân

Khoa Cơ - Điện, Học viện Nông nghiệp Việt Nam

*Tác giả liên hệ: dthuan@vnua.edu.vn

Ngày nhận bài: 02.04.2024

Ngày chấp nhận đăng: 23.05.2024

TÓM TẮT

Nghiên cứu này được thực hiện nhằm phân tích tính kết cấu tấm sandwich với lớp lõi bằng vật liệu xốp (FGP), hai lớp bề mặt là vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr. Phương pháp nghiên cứu là mô hình lý thuyết bằng phương pháp giải tích dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT). Ba quy luật phân bố lỗ rỗng của lớp lõi được xem xét bao gồm: phân bố đều, phân bố không đều đối xứng và phân bố không đều bất đối xứng. Hai lớp bề mặt FGM giả thiết có cơ tính biến thiên tuân theo quy luật lũy thừa. Dựa trên nguyên lý Hamilton, hệ phương trình cân bằng được thiết lập và giải bằng cách sử dụng dạng nghiệm Navier cho tấm chữ nhật liên kết khớp trên chu tuyến. Kết quả nghiên cứu mô hình lý thuyết đã thiết lập và chương trình tính được kiểm chứng bằng cách so sánh với các công bố từ các tác giả khác, qua đó đã chứng minh độ tin cậy của phương pháp giải. Bên cạnh đó, ảnh hưởng của tham số vật liệu, kích thước hình học, nền đàn hồi đến độ võng và ứng suất của tấm sandwich được khảo sát qua các ví dụ số.

Từ khóa: Phân tích tĩnh, tấm sandwich, vật liệu FGM, vật liệu xốp, nền đàn hồi.

Static Analysis of Sandwich FG Porous Plates Resting on Winkler/Pasternak/Kerr Foundation

ABSTRACT

The article analyzed the static behavior of sandwich plates with a core made of foam material (FGP) and two surface layers made of functionally graded materials (FGM) placed on a Winkler/Pasternak/Kerr foundation according to the first-order shear deformation theory (FSDT). Three types of pore distribution in the core were considered: uniform, symmetric non-uniform, and asymmetric non-uniform distributions. It was assumed that the mechanical properties of the FGM surface layers follow exponential laws. Based on Hamilton's principle, the equilibrium equations were formulated and solved using the Navier solution for simply supported rectangular plates. The model and computational program were validated through comparisons with previous publications, demonstrating the reliability of the proposed solution. The influence of material parameters, geometry size, and foundation flexibility on the deflection and stress of the sandwich panel was examined through numerical examples.

Keywords: static analysis, sandwich plates, FGM, porous material, elastic foundations.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Materials - FGM) là một loại vật liệu tiên tiến, trong đó đặc tính thay đổi theo chiều dày của kết cấu (Li & cs., 2020). Điều này giúp tránh hiện tượng bong tróc lớp, giảm ứng suất nhiệt và tập trung. FGM thường kết hợp kim loại và gốm, cung cấp khả năng chịu nhiệt và độ

bền, phù hợp cho các ứng dụng làm việc ở nhiệt độ cao. Các kết quả nghiên cứu ban đầu về ứng xử cơ học của kết cấu FGM có thể kể đến các dầm (Asghari & cs., 2010; Trinh & cs., 2016; Vo & cs., 2014), tấm (Reddy, 2010; Thai & cs., 2016; Zenkour, 2006; Zhao & cs., 2009) và vỏ (Mantari, 2015; Torabi & cs., 2013; Tornabene, 2009). Vật liệu FGP (Functionally Graded Porous) nổi tiếng với tính nhẹ, khả năng hấp

thụ năng lượng, cách âm và cách nhiệt. Cấu trúc của nó chứa các lỗ rỗng phân bố đều trong kết cấu, tạo ra sự biến đổi liên tục trong đặc tính cơ học và biến nó thành một dạng của vật liệu FGM. Các công trình nghiên cứu đáng chú ý về ứng xử cơ học của kết cấu FGP đã được đề cập trong các tài liệu tham khảo (Guo & cs., 2019; Rezaei & cs., 2015; Rezaei & cs., 2016). Kết cấu sandwich, với lớp lõi xếp và lớp bề mặt FGM, là giải pháp phổ biến trong hàng không, ô tô và xây dựng, giúp giảm tiếng ồn, cách nhiệt và chịu tải trọng va chạm. Độ chính xác và hiệu quả của phân tích cơ học phụ thuộc nhiều vào lý thuyết tính toán.

Trong lý thuyết đơn lớp đương (ESL), lý thuyết tấm cổ điển (CLPT) chỉ áp dụng cho tấm và vỏ mỏng vì nó không xem xét ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) phù hợp với tấm và vỏ có chiều dày trung bình, nhưng cần hệ số hiệu chỉnh cắt do biến dạng cắt ngang là hằng số theo chiều dày kết cấu. Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) được phát triển để khắc phục nhược điểm của FSDT, nhưng phức tạp và không linh hoạt, nên chỉ được sử dụng khi cần thiết. Một số nghiên cứu về đặc tính cơ học của các tấm sandwich FGM/FGP sử dụng các lý thuyết đơn lớp đương được Zenkour (2005) và Zenkour & cs. (2010) sử dụng lời giải giải tích để phân tích uốn, ổn định và dao động của các tấm sandwich FGM chịu tải nhiệt độ và cơ học trên cơ sở các lý thuyết tấm CLPT, FSDT và HSDT. Daikh & Zenkour (2019) đã đề xuất lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) mới để nghiên cứu ứng xử uốn, ổn định và dao động tự do của các tấm sandwich FGP sigmoid. Hơn nữa, Thai & cs. (2014) đã phát triển một lý thuyết tấm bậc nhất mới để phân tích uốn, ổn định và dao động tự do của tấm sandwich FGM. Houari & cs. (2013) đã sử dụng HSDT cải tiến để phân tích uốn đàn hồi nhiệt của tấm sandwich FGM. Li & cs. (2018) đã sử dụng phương pháp Navier để nghiên cứu sự uốn cong/uốn cơ nhiệt của tấm sandwich FGM. Tounsi & cs. (2013) đã sử dụng lý thuyết tấm cải tiến để phân tích uốn đàn hồi nhiệt tấm sandwich FGM. Ngoài ra, một số kết quả về

ứng xử cơ học của tấm sandwich FGM có thể được tìm thấy trong tài liệu của các tác giả Đặng Xuân Hùng & cs. (2023); Neves & cs. (2013); Quoc & cs. (2021); Tlidji & cs. (2014); Tran & cs. (2023); Vafakhah & Neya (2019) và Zaoui & cs. (2019).

Trong thực tế, các kết cấu thường đặt trên nền đàn hồi hoặc bao quanh bởi môi trường đàn hồi, như thanh tà vẹt của đường ray tàu hỏa, đường ống dẫn dầu, mặt đường, hoặc cầu phao. Nghiên cứu về ứng xử cơ học của kết cấu dạng tấm, đặc biệt là kết cấu tấm FGM trên nền đàn hồi, nhận được sự quan tâm từ nhiều nhà khoa học. Trong kỹ thuật, ba mô hình nền thông dụng thường được sử dụng là Winkler, Pasternak và Kerr. Mô hình nền Winkler (1867) được sử dụng phổ biến trong nghiên cứu về các bài toán liên quan đến tấm trên nền đàn hồi vì tính đơn giản của nó. Loại mô hình nền này thường được gọi là mô hình nền “một tham số” vì nó chỉ có một thông số để mô tả độ cứng của các lò xo nền Winkler. Tuy nhiên, mô hình nền Winkler cũng có hạn chế là không phản ánh được tính liên tục trong chuyển vị của nền do giả thiết rằng các lò xo hoạt động độc lập. Để khắc phục hạn chế của mô hình nền một tham số, một số nhà nghiên cứu của Filonenko-Borodich (1940); Pasternak (1954); Sokolov (1952) đã tiến hành cải tiến bằng cách thêm một tham số nền thứ hai vào mô hình Winkler, nhằm mô tả sự tồn tại của lớp trượt bên trong môi trường nền. Mô hình nền này được gọi là mô hình nền “hai tham số”. Trong các mô hình nền hai tham số này, mô hình nền Pasternak (1954) được áp dụng nhiều hơn cả. Sau mô hình nền hai tham số, Hetenyi (1950) và Kerr (1965; 1984); đã đưa thêm một tham số nền thứ ba (mô hình nền ba tham số). Thêm tham số nền thứ ba này nhằm cung cấp mức độ linh hoạt cao hơn trong việc điều chỉnh tính liên tục của bề mặt nền giữa các vùng tải và không tải dưới tấm. Trong số các mô hình nền ba tham số, mô hình nền kiểu Kerr (1965; 1984) được đặc biệt quan tâm vì nó bắt nguồn từ mô hình nền hai tham số Winkler - Pasternak phổ biến (Pasternak, 1954) đã có.

Qua tổng quan nghiên cứu, có thể nhận thấy nhu cầu ứng dụng vật liệu FGM và vật liệu xốp vào thực tế là rất lớn, do đó, các kết cấu sử dụng hai loại vật liệu này đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu từ các nhà khoa học. Đã có nhiều bài báo tập trung vào phân tích tĩnh, động và ổn định của các tấm sandwich FGM xếp đặt trên nền đàn hồi Kerr với ba hệ số nền lần lượt là: k_u là hệ số độ cứng uốn lớp đàn hồi trên; k_s là hệ số độ cứng cắt lớp giữa; k_l là hệ số độ cứng uốn lớp đàn hồi dưới.

Vật liệu P-FGM gồm hai vật liệu thành phần: gốm và kim loại. Mô đun đàn hồi của vật liệu được xác định theo công thức sau:

$E(z) = E_c + (E_m - E_c)V(z)$ (1)

Trong đó: $V(z)$ là hàm thể tích cho tấm sandwich FGM xếp:

Lớp 1 (FGM mặt trên tấm):

$$V_t(z) = \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^p \text{ với } z \in [z_1, z_2] \quad (2)$$

Lớp 2 (FGP lớp lõi) tính theo các công thức

$$(3) \div (6) \text{ với } z \in [z_2, z_3] \quad (3)$$

Lớp 3 (FGM mặt dưới tấm):

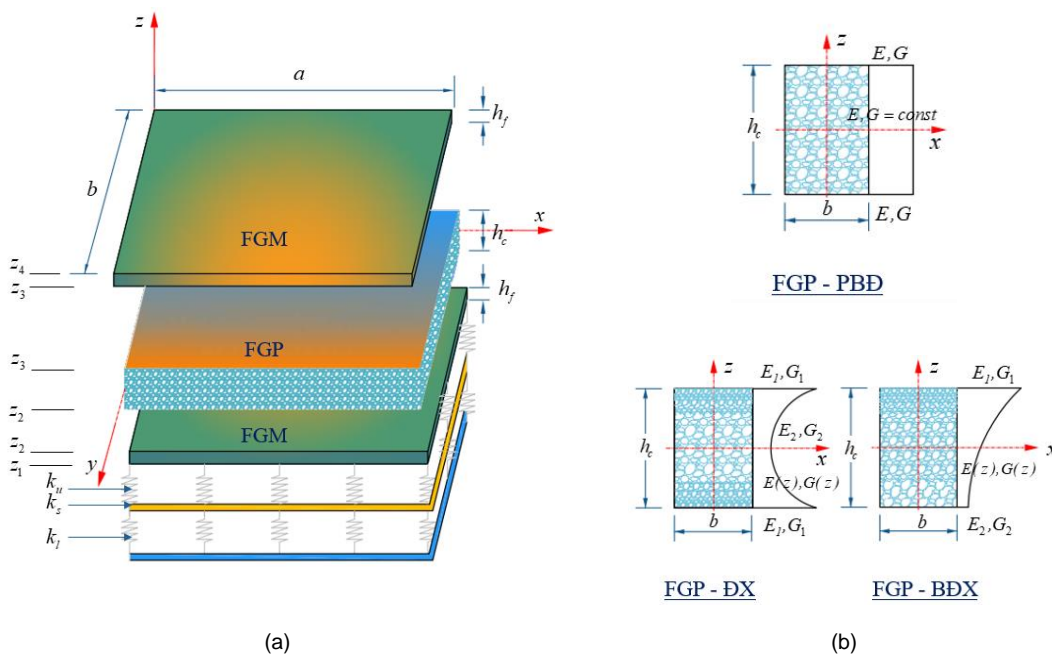
$$V_t(z) = \left(\frac{z - z_4}{z_3 - z_4} \right)^p \text{ với } z \in [z_3, z_4] \quad (4)$$

với E_m và E_c lần lượt là mô đun đàn hồi của kim loại và gốm cấu thành nên vật liệu FGM; "p" là chỉ số tỷ lệ thể tích của vật liệu FGM.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. Tấm sandwich FGM xếp

Xét tấm sandwich FGM xếp có cấu tạo như hình 1a: Lớp mặt trên và lớp mặt dưới có chiều dày là h_f và được làm bằng vật liệu FGM, lớp lõi có chiều dày là h_c được làm bằng vật liệu rỗng (bọt kim loại). Tấm có chiều dài a, chiều rộng b và chiều dày $h = h_c + 2h_f$. Theo phương chiều dày, các lớp được phân biệt theo các tọa độ từ



Hình 1. Mô hình tấm sandwich FGM xếp đặt trên nền đàn hồi Kerr

Vật liệu xếp FGP được xem xét trong nghiên cứu này là bọt kim loại (metal foam) với ba quy luật phân bố (Hình 1b): Phân bố đều (PBD), phân bố không đều đối xứng (ĐX) và phân bố không đều bất đối xứng (BĐX). Mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng của vật liệu FGP phụ thuộc vào mật độ phân bố lỗ rỗng và biến thiên liên tục theo chiều cao tấm theo các quy luật sau (Wu & cs., 2018):

- Phân bố đều:

$$E(z) = E_1(1 - e_0\chi) \text{ với}$$

$$\chi = \frac{1}{e_0} \left(1 - \left(\frac{2}{\pi} (\sqrt{1 - e_0} - 1) + 1 \right)^2 \right);$$

$$G(z) = G_1(1 - e_0\chi) \quad (5)$$

- Phân bố không đều - đối xứng:

$$E(z) = E_1 \left(1 - e_0 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right);$$

$$G(z) = G_1 \left(1 - e_0 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right) \quad (6)$$

- Phân bố không đều - bất đối xứng:

$$E(z) = E_1 \left(1 - e_0 \cos \left(\pi \left(\frac{z}{h} + 1/4 \right) \right) \right);$$

$$G(z) = G_1 \left(1 - e_0 \cos \left(\pi \left(\frac{z}{h} + 1/4 \right) \right) \right) \quad (7)$$

Trong đó, hệ số mật độ lỗ rỗng e_0 được tính theo công thức:

$$e_0 = \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) = \left(1 - \frac{G_2}{G_1} \right)$$

với: $e_0 \in (0,1)$ (8)

với E_1, E_2 và G_1, G_2 tương ứng là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén và mô đun đàn hồi trượt. Hệ số Poisson được coi là không thay đổi theo tọa độ z .

2.2. Các phương trình cơ bản

Để phân tích dao động riêng của tấm sandwich FGM xếp đặt trên nền đàn hồi, bài báo sử dụng lý thuyết tấm bậc nhất (FSDT) (Mindlin, 1951; Reissner, 1945):

Trường chuyển vị:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \quad (9)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

trong đó, u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của một điểm bất kỳ trên mặt trung bình theo các phương x, y, z ; θ_x, θ_y là các góc xoay so với phương ban đầu của pháp tuyến mặt trung bình tại điểm đang xét quanh các trục y, x .

Trường biến dạng được suy ra từ trường chuyển vị:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (10)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y$$

Theo định luật Hooke, quan hệ ứng suất - biến dạng được xác định theo công thức sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Trong đó C_{ij} được xác định như sau:

$$C_{11} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}$$

$$C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2} \quad (12)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)}$$

Thay các thành phần biến dạng trong (10) vào (11) rồi thực hiện tích phân theo chiều dày tấm thu được quan hệ giữa các thành phần nội lực và biến dạng như công thức 13.

trong đó, (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) , (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) và (Q_{yz}, Q_{xz}) lần lượt là các thành phần lực màng, mô men và lực cắt; $k_s = 5/6$ là hệ số hiệu chỉnh cắt; A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} là các ma trận hệ số vật liệu và được tính theo công thức (14).

Hệ phương trình cân bằng biểu diễn theo các thành phần chuyển vị $w_0, u_0, v_0, \theta_x, \theta_y$ cho tấm sandwich FGM xấp đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr được xác định theo nguyên lý Hamilton (Reddy 2017) theo công thức (15).

với f_e là phản lực nền, được xác định theo công thức 16 (Li & cs., 2021).

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & B_{12} & B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 & D_{12} & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(1, z, z^2) dz \quad ij = 11, 12, 22, 66 \quad (14)$$

$$A_{ij}^s = k_s \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} dz \quad ij = 44, 55$$

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} &= 0 \\ A_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} &= 0 \\ A_{44} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + A_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + q(x, y) - f_e &= 0 \\ B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} - A_{44} \theta_x \\ + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - A_{44} \frac{\partial w_0}{\partial x} &= 0 \\ B_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} - A_{55} \theta_y \\ + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} - A_{55} \frac{\partial w_0}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

2.3. Lời giải Navier

Trong nghiên cứu này, ứng xử tĩnh của tấm sandwich FGM xấp đặt trên nền đàn hồi được phân tích bằng cách sử dụng lời giải Navier với điều kiện biên tựa khớp trên chu tuyến thỏa mãn công thức 17.

Các thành phần chuyển vị, tải trọng ngang được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép, thỏa mãn điều kiện biên (17) theo công thức 18.

Thay các thành phần chuyển vị từ (18) vào hệ phương trình cân bằng (15) và thực hiện các biến đổi toán học, ta nhận được hệ phương trình 19.

trong đó các hệ số s_{ij} được xác định bởi phương trình 20.

$$f_e = k_w w_0 \text{ với nền Winkler;}$$

$$f_e = k_w w_0 - k_p \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \text{ với nền Pasternak;}$$
(16)

$$f_e = \left(\frac{k_1 k_u}{k_1 + k_u} \right) w_0 - \frac{k_s k_u}{k_1 + k_u} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \text{ với nền Kerr.}$$

$$v_0 = w_0 = N_x = M_x = \theta_y = 0 \text{ tại } x = 0, a$$

$$u_0 = w_0 = N_y = M_y = \theta_x = 0 \text{ tại } y = 0, b$$
(17)

$$u_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} \cos \alpha x \sin \beta y ; v_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} \sin \alpha x \cos \beta y$$

$$w_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} \sin \alpha x \sin \beta y ; \theta_x(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0xmn} \cos \alpha x \sin \beta y$$

$$\theta_y(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0ymn} \sin \alpha x \cos \beta y ; q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y$$
(18)

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & 0 & s_{24} & s_{25} \\ 0 & 0 & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0mn} \\ v_{0mn} \\ w_{0mn} \\ \theta_{0xmn} \\ \theta_{0ymn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$
(19)

$$s_{11} = A_{11} \alpha^2 + A_{66} \beta^2 ; s_{12} = (A_{12} + A_{66}) \alpha \beta ; s_{14} = B_{11} \alpha^2 + B_{66} \beta^2 ;$$

$$s_{15} = (B_{12} + B_{66}) \alpha \beta ; s_{22} = A_{66} \alpha^2 + A_{22} \beta^2 ; s_{24} = s_{15} ;$$

$$s_{25} = B_{66} \alpha^2 + B_{22} \beta^2 ; s_{34} = A_{55}^s \alpha ; s_{35} = A_{44}^s \alpha ;$$

$$s_{44} = D_{11} \alpha^2 + D_{66} \beta^2 + A_{55}^s ; s_{45} = s_{54} = (D_{12} + D_{66}) \alpha \beta ;$$

$$s_{55} = D_{66} \alpha^2 + D_{22} \beta^2 + A_{55}^s ;$$

$$s_{33} = A_{55}^s \alpha^2 + A_{44}^s \beta^2 + k_w \text{ với nền Winkler;}$$

$$s_{33} = A_{55}^s \alpha^2 + A_{44}^s \beta^2 + k_w + k_p (\alpha^2 + \beta^2) \text{ với nền Pasternak;}$$

$$s_{33} = A_{55}^s \alpha^2 + A_{44}^s \beta^2 + \frac{k_1 k_u}{k_1 + k_u} + \frac{k_s k_u}{k_1 + k_u} (\alpha^2 + \beta^2) \text{ với nền Kerr.}$$
(20)

Giải hệ phương trình (19) ta nhận được các hệ số $u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0mn}, \theta_{0xmn}, \theta_{0ymn}$, từ đó xác định được các thành phần chuyển vị, biến dạng, ứng suất và nội lực tương ứng của tấm.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Trên cơ sở lý thuyết đã trình bày, bài báo viết chương trình máy tính trên nền ngôn ngữ lập trình Matlab để tính toán độ võng và các thành phần ứng suất của tấm sandwich FGM

xếp. Các công thức không thứ nguyên sau đây được sử dụng theo công thức 21 (Thai & Choi, 2011; Zenkour, 2005).

3.1. Ví dụ kiểm chứng

3.1.1. Kiểm chứng độ võng, ứng suất cho tấm sandwich FGM, lõi đẳng hướng

Kết quả so sánh độ võng \bar{w} và ứng suất $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{xz}$ của tấm sandwich có lớp bề mặt FGM (cấu tạo từ hai vật liệu là nhôm và zirconia), lớp

lõi zirconia với kết quả giải tích theo FSDT của Zenkour (Zenkour, 2005) được trình bày trong bảng 1. Tầm chịu tải trọng cơ học phân bố dạng

hình sin: $q = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$. Mô đun đàn

hồi và hệ số Poisson của nhôm là: $E_m = 70$ Gpa và $\nu_m = 0,3$; zirconia: $E_c = 151$ GPa, $\nu_c = 0,3$.

3.1.2. Kiểm chứng độ võng, ứng suất của tấm đặt trên nền đàn hồi

Bảng 2 trình bày kết quả của bài báo so sánh độ võng không thứ nguyên của tấm đẳng hướng alumina ($E = 80GPa, \nu = 0,3$) đặt trên nền đàn hồi Pasternak với kết quả tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản của Thai & Choi (2011).

Sự chênh lệch giữa kết quả của nghiên cứu và tài liệu kiểm chứng trong bảng 1 và bảng 2 là không đáng kể, điều này cho thấy phương pháp phân tích và chương trình tính mà bài báo

đã thiết lập là đáng tin cậy và chính xác. Trên cơ sở đó, bài báo thực hiện các ví dụ khảo sát trong mục tiếp theo.

3.2. Ví dụ khảo sát

Trong mục này, bài báo phân tích uốn tấm sandwich FGM xấp tiết diện chữ nhật như hình 1, đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr. Lớp bề mặt là vật liệu FGM cấu thành từ hai loại vật liệu nhôm và zirconia, lớp lõi bột kim loại nhôm với hệ số lỗ rỗng e_0 . Các thuộc tính vật liệu như mục 2.2.1. Tải trọng phân bố hình sin $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$. Ba dạng phân bố lỗ rỗng được khảo sát bao gồm: Phân bố đều, phân bố không đều đối xứng và phân bố không đều bất đối xứng như đã trình bày tại mục 2.1. Các kết quả độ võng, ứng suất và các tham số nền không thứ nguyên lần lượt được tính theo được tính theo công thức (21).

$$\begin{aligned}
 K_w &= \frac{K_w a^4}{E_0 h^3}; K_p = \frac{k_p a^2}{E_0 h^3}; K_s = \frac{k_s a^4}{E_0 h^3}; K_u = \frac{k_u a^4}{E_0 h^3}; K_1 = \frac{k_1 a^4}{E_0 h^3}; \\
 \hat{w} &= \frac{100D_0}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right); D_0 = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu)}; \hat{\sigma}_{xx} = -\frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2}\right); \\
 \hat{\sigma}_{yy} &= -\frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2}\right); \hat{\sigma}_{xy} = \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{2}\right); \\
 \bar{w} &= \frac{10hE_0}{q_0 a^2} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right); \bar{\sigma}_{xx} = \frac{10h^2}{q_0 a^2} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right); \bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right); \\
 E_0 &= 1GPa.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Bảng 1. So sánh độ võng \bar{w} , ứng suất $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{xz}$ của tấm sandwich có lõi là vật liệu đẳng hướng và hai lớp bề mặt là vật liệu FGM (tỷ lệ chiều dày các lớp [1-1-1])

p	\bar{w}		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{xz}$	
	Bài báo	Zenkour (2005)	Bài báo	Zenkour (2005)	Bài báo	Zenkour (2005)
0	0,19607	0,19607	1,97576	1,97576	0,19099	0,19099
1	0,29301	0,29301	1,38303	1,38303	0,23257	0,23257
10	0,38787	0,38787	1,83753	1,83754	0,28299	0,28299

Bảng 2. So sánh độ võng của tấm đẳng hướng đặt trên nền đàn hồi Pasternak ($a/b = 3, a/h = 10, K_w = 100, K_p = 100$)

Mô hình	\hat{w}	$\hat{\sigma}_{xx}$	$\hat{\sigma}_{yy}$	$\hat{\sigma}_{xy}$
Thai & Choi (2011)	1,2583	0,7160	0,2447	0,2890
Bài báo	1,2583	0,7124	0,2418	0,2802

Bảng 3. Độ võng và ứng suất không thứ nguyên của tấm sandwich FGM xốp
($a = b = 1$; $a/h = 10$; $p = 10$; ĐX; tỷ lệ chiều dày các lớp tấm sandwich [1-2-1])

Nền đàn hồi	Hệ số nền	e_0	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
Winkler	$K_w = 10$	0	0,2180	2,1632	0,1249
		0,1	0,2195	2,1745	0,1158
		0,4	0,2243	2,2092	0,0849
Pasternak	$K_w = G_p = 10$	0	0,2090	2,0739	0,1197
		0,1	0,2104	2,0842	0,1110
		0,4	0,2148	2,1155	0,0813
Kerr	$K_u = K_s = K_l = 10$	0	0,2136	2,1199	0,1224
		0,1	0,2151	2,1307	0,1135
		0,4	0,2197	2,1637	0,0832
	$K_u = K_s = 10$; $K_l = 15$	0	0,2145	2,1284	0,1229
		0,1	0,2159	2,1393	0,1139
		0,4	0,2206	2,1727	0,0835
	$K_u = K_s = K_l = 15$	0	0,2113	2,0966	0,1210
		0,1	0,2127	2,1072	0,1122
		0,4	0,2172	2,1394	0,0823

Bảng 4. Độ võng không thứ nguyên $\bar{w}(a/2, a/2)$
của tấm sandwich FGM xốp trên nền đàn hồi Kerr
($a = b = 1$; $a/h = 10$; $p = 10$; $K_u = K_s = K_l = 15$ sandwich [1-2-1])

Kiểu phân bố lỗ rỗng	p	e_0				
		0,1	0,3	0,5	0,7	0,8
ĐX	0	0,4014	0,4111	0,4216	0,4331	0,4393
	1	0,2570	0,2613	0,2658	0,2708	0,2734
	2	0,2341	0,2377	0,2415	0,2456	0,2478
	5	0,2180	0,2212	0,2245	0,2280	0,2298
	10	0,2127	0,2156	0,2188	0,2221	0,2238
	BĐX	0	0,4006	0,4083	0,4166	0,4255
1		0,2566	0,2600	0,2636	0,2674	0,2694
2		0,2338	0,2366	0,2396	0,2428	0,2444
5		0,2177	0,2202	0,2228	0,2256	0,2270
10		0,2124	0,2148	0,2172	0,2198	0,2212
PBD		0	0,4004	0,4079	0,4164	0,4263
	1	0,2565	0,2598	0,2635	0,2678	0,2703
	2	0,2337	0,2365	0,2395	0,2431	0,2452
	5	0,2177	0,2201	0,2228	0,2258	0,2277
	10	0,2123	0,2146	0,2172	0,2201	0,2218

3.2.1. Ảnh hưởng của nền đàn hồi

Kết quả trong bảng 3 đã chỉ ra rằng các giá trị \bar{w} , $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{xz}$ của tấm sandwich FGM xốp trên

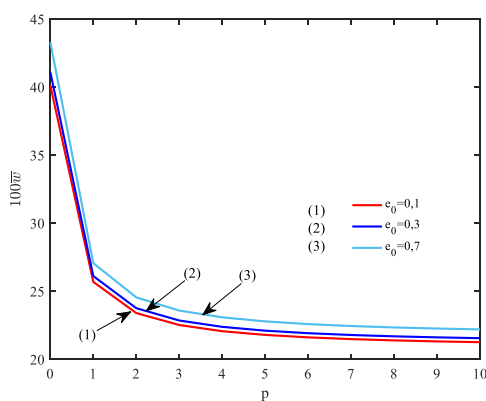
nền đàn hồi Pasternak và Kerr đều thấp hơn so với tấm trên nền đàn hồi Winkler. Sự khác biệt này có thể được lý giải bằng việc nền đàn hồi Pasternak và Kerr tính đến hệ số độ cứng cắt

của nền. Hơn nữa, với cùng mức độ độ cứng uốn của lớp nền dưới và độ cứng cốt, tấm trên nền đàn hồi Kerr có độ võng và các ứng suất không thứ nguyên lớn hơn so với tấm trên nền đàn hồi Pasternak. Nguyên nhân là do mô hình nền Kerr bao gồm một lớp nền đàn hồi bổ sung phía trên tiếp xúc với tấm, điều này làm giảm độ cứng uốn của hệ tấm – nền. Ngoài ra, với tấm đặt trên nền đàn hồi Kerr, độ võng và các ứng suất không thứ nguyên của tấm tăng khi tăng thông số Kerr (K_1), và giảm khi tăng hai tham số K_u và K_s .

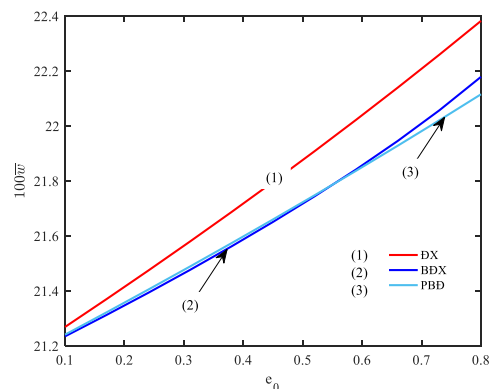
3.2.2. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích p và hệ số rỗng e_0

Độ võng lớn nhất của tấm sandwich FGM

xếp đặt trên nền đàn hồi Kerr với ba dạng phân bố lỗ rỗng khi hệ số rỗng e_0 thay đổi thể hiện trong bảng 4 và hình 2. Quan sát kết quả ta thấy khi tăng chỉ số p (tăng phần thể tích gốm, giảm kim loại), độ võng của tấm sandwich giảm xuống, hay nói cách khác là khi chỉ số p tăng lên sẽ làm tăng độ cứng của tấm sandwich FGM xếp. Kết quả cũng chỉ ra rằng khi hệ số lỗ rỗng tăng sẽ làm độ cứng của tấm giảm xuống (tấm bị võng nhiều hơn) với cả ba kiểu phân bố lỗ rỗng. Với số liệu khảo sát, trong ba kiểu phân bố lỗ rỗng, kiểu PBD luôn cho độ võng của tấm sandwich FGM xếp là nhỏ nhất (độ cứng tấm lớn nhất) với mọi giá trị của e_0 . Ngoài ra, độ võng trong trường hợp phân bố lỗ rỗng BDX và PBD cho kết quả xấp xỉ nhau.

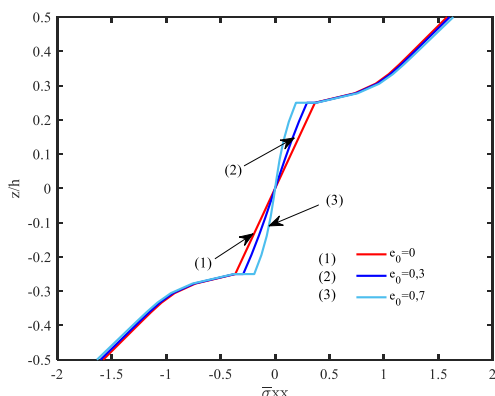


(a) Kiểu phân bố lỗ rỗng DX

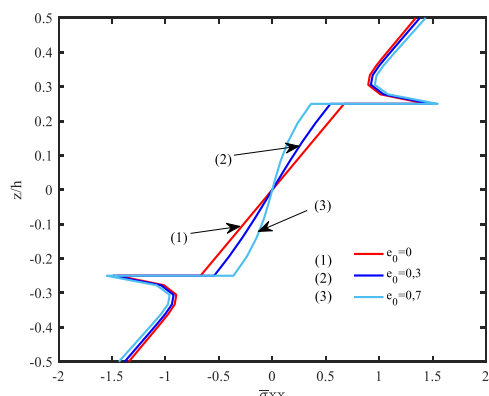


(b) Độ võng \bar{w} theo hệ số e_0 ($p = 10$)

Hình 2. Biến thiên độ võng \bar{w} của tấm sandwich FGM xếp trên nền đàn hồi Kerr theo hệ số lỗ rỗng e_0 và chỉ số tỷ lệ thể tích p (1-2-1, $a = b$, $a/h=10$, $K_u = K_s = K_l = 15$)

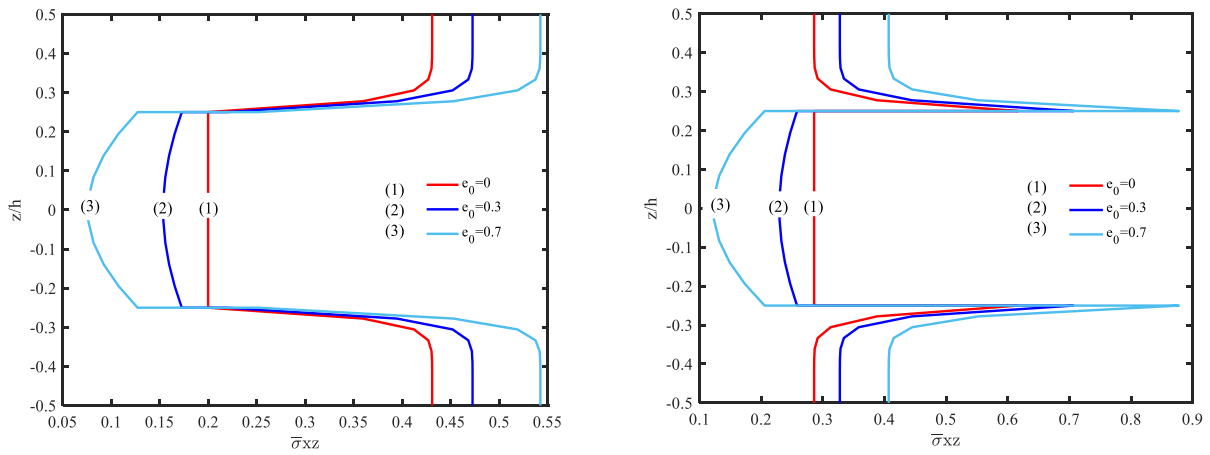


(a) FGM có bề mặt là kim loại tiếp xúc với lớp lõi bọt kim loại



(b) FGM có bề mặt là gốm tiếp xúc với lớp lõi bọt kim loại

Hình 3. Biến thiên ứng suất pháp $\bar{\sigma}_{xx}$ theo chiều cao tấm sandwich FGM xếp trên nền đàn hồi Kerr (1-2-1, $a = b$, $a/h = 10$, $K_u = K_s = K_l = 10$, $p = 10$, $e_0 = 0,3$)



a) FGM có bề mặt là kim loại tiếp xúc với lớp lõi bột kim loại

b) FGM có bề mặt là gốm tiếp xúc với lớp lõi bột kim loại

Hình 4. Biến thiên ứng suất tiếp $\bar{\sigma}_{xz}$ theo chiều cao tấm sandwich FGM xếp trên nền đàn hồi Kerr (1-2-1, $a = b$, $a/h = 10$, $K_u = K_s = K_f = 10$, $p = 10$)

Bảng 5. Độ võng và ứng suất không thứ nguyên của tấm sandwich FGM xếp đặt trên nền Kerr theo tỷ số h_c/h_f ($a = b = 1$; $a/h = 10$; $p = 10$; $e_0 = 0,3$)

Kiểu phân bố lỗ rỗng	$h_f-h_c-h_f$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
ĐX	1-1-1	0,2030	2,0139	0,0815
	1-2-1	0,2181	2,1526	0,0939
	1-4-1	0,2478	2,4398	0,1099
	1-6-1	0,2722	2,6825	0,1196
BĐX	1-1-1	0,2025	2,0091	0,0903
	1-2-1	0,2172	2,1365	0,1034
	1-4-1	0,2469	2,4035	0,1206
	1-6-1	0,2723	2,6342	0,1314
PBD	1-1-1	0,2025	2,0112	0,0918
	1-2-1	0,2171	2,1460	0,1050
	1-4-1	0,2468	2,4356	0,1225
	1-6-1	0,2725	2,6913	0,1336

Đồ thị trong hình 3 và hình 4 minh họa sự ảnh hưởng của hệ số rỗng e_0 đối với phân bố của ứng suất pháp $\bar{\sigma}_{xx}$ và ứng suất tiếp $\bar{\sigma}_{xz}$ theo chiều cao của tấm sandwich FGM xếp trên nền đàn hồi Kerr. Hai trường hợp cấu trúc lớp vật liệu FGM được xem xét: trường hợp thứ nhất (Hình 3a, Hình 4a), các lớp FGM có bề mặt là kim loại tiếp xúc với lớp lõi xếp bột kim loại FGP; trường hợp thứ hai (Hình 3b, Hình 4b), các lớp FGM có bề mặt là gốm tiếp xúc với lớp lõi

xếp bột kim loại FGP. Trong trường hợp thứ hai, đồ thị cho thấy sự xuất hiện của “bước nhảy” giá trị ứng suất giữa các lớp, dẫn đến hiện tượng tập trung ứng suất và nếu ứng suất tập trung vượt quá khả năng chịu tải của vật liệu, có thể dẫn đến hiện tượng bong tróc hoặc phá hủy tại bề mặt tiếp xúc của các lớp tấm sandwich. Ngoài ra, việc cấu tạo lớp FGM trong trường hợp thứ nhất còn đảm bảo được tính liên tục của vật liệu. Do đó, cấu trúc vật liệu của lớp FGM trong

trường hợp thứ nhất được xem là lựa chọn hợp lý hơn khi lớp lõi là bột kim loại FGP. Ngoài ra, từ hình 4, có thể nhận thấy rằng với lý thuyết tấm FSDT được sử dụng trong bài báo, ứng suất cắt ngang không thỏa mãn điều kiện triệt tiêu tại bề mặt tấm, do đó lý thuyết FSDT cần sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt ($k_s = 5/6$)

3.2.3. Ảnh hưởng của tỷ số chiều dày lớp lõi

Bảng 5 thể hiện ảnh hưởng của tỷ lệ chiều cao các lớp tấm sandwich (tỷ số h_c/h_f) đến độ võng \bar{w} và ứng suất $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{xz}$ của tấm sandwich FGM xếp đặt trên nền đàn hồi Kerr. Với số liệu khảo sát cho thấy khi tăng tỷ số h_c/h_f sẽ làm độ võng và ứng suất của tấm tăng theo hay nói cách khác khi tỷ số h_c/h_f tăng sẽ làm giảm độ cứng của tấm sandwich FGM xếp.

4. KẾT LUẬN

Nghiên cứu đã thiết lập nghiệm giải tích cho bài toán phân tích tĩnh tấm sandwich với lớp lõi bằng vật liệu xốp, hai lớp bề mặt là vật liệu FGM đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr. Dựa trên lý thuyết của tấm bậc nhất FSDT, các phương trình cân bằng được thiết lập theo nguyên lý Hamilton, đó là cơ sở để xác định độ võng và ứng suất của tấm sandwich theo dạng nghiệm Navier. Độ võng và ứng suất của tấm sandwich FGM xếp đã được tính toán với sự biến thiên của các thông số vật liệu, kích thước và đặc tính đàn hồi của nền. Kết quả tính toán cho thấy rằng độ võng và ứng suất của tấm sandwich FGM xếp phụ thuộc vào các yếu tố như hệ số lỗ rỗng e_n , chỉ số tỷ lệ thể tích p , kích thước hình học, kiểu phân bố lỗ rỗng của lớp lõi FGP và loại nền đàn hồi. Những kết quả này có ý nghĩa quan trọng trong việc phân tích ứng xử cơ học của các cấu kiện công trình đặt trên nền đàn hồi, cũng như cung cấp cơ sở hữu ích cho việc tối ưu hóa thiết kế của kết cấu tấm sandwich FGM xếp trong các nghiên cứu tiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Asghari M., Ahmadian M., Kahrobaian M. & Rahaeifard M. (2010). On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Materials & Design* (1980-2015). 31(5): 2324-2329.

Daikh A.A. & Zenkour A.M. (2019). Effect of porosity on the bending analysis of various functionally graded sandwich plates. *Materials Research Express*. 6(6): 065703.

Daikh A.A. & Zenkour A.M. (2019). Free vibration and buckling of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates using a simple higher-order shear deformation theory. *Materials Research Express*. 6(11): 115707.

Đặng Xuân Hùng, Vũ Văn Thắm, Trần Hữu Quốc & Phommavongsa S. (2023). Phân tích dao động riêng kết cấu tấm Sandwich Auxetic áp điện có cơ tính biến thiên. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCN XD)-ĐHXDHN*, 17(2V): 42-60.

Filonenko-Borodich M. (1940). Some approximate theories of elastic foundation. *Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanika, Moscow*. 46: 3-18.

Guo H., Zheng H. & Zhuang X. (2019). Numerical manifold method for vibration analysis of Kirchhoff's plates of arbitrary geometry. *Applied Mathematical Modelling*. 66: 695-727.

Hetenyi M. (1950). A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity. *Journal of Applied Physics*. 21(1): 55-58.

Houari M.S.A., Tounsi A. & Bég O.A. (2013). Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences*. 76: 102-111.

Kerr A. (1984). On the formal development of elastic foundation models. *Ingenieur-Archiv*. 54(6): 455-464.

Kerr A.D. (1965). A study of a new foundation model. *Acta Mechanica*. 1(2): 135-147.

Li Y., Feng Z., Hao L., Huang L., Xin C., Wang Y., Bilotti E., Essa K., Zhang H. & Li Z. (2020). A Review on Functionally Graded Materials and Structures via Additive Manufacturing: From Multi-Scale Design to Versatile Functional Properties. *Advanced Materials Technologies*. 5(6): 1900981.

Li D., Deng Z., Xiao H. & Jin P. (2018). Bending analysis of sandwich plates with different face sheet materials and functionally graded soft core. *Thin-Walled Structures*. 122: 8-16.

Li D., Deng Z., Xiao H. & Zhu L. (2018). Thermomechanical bending analysis of functionally graded sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded cores. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 25(3): 179-191.

Li M., Soares C.G. & Yan R. (2021). Free vibration analysis of FGM plates on Winkler/Pasternak/Kerr foundation by using a simple quasi-3D HSDT. *Composite Structures*. 264: 113643.

Mantari J. (2015). Refined and generalized hybrid type quasi-3D shear deformation theory for the bending analysis of functionally graded shells. *Composites Part B: Engineering*. 83: 142-152.

- Mindlin R. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME. J. Appl. Mech.* 18(1): 31-38.
- Neves A., Ferreira A., Carrera E., Cinefra M., Roque C., Jorge R. & Soares C.M. (2013). Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Composites Part B: Engineering*. 44(1): 657-674.
- Pasternak P. (1954). On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gos. Izd. Lit. po Strait i Arkh.*
- Quoc T.H., Tu T.M. & Van Tham V. (2021). Free vibration and dynamic response of sandwich composite plates with auxetic honeycomb core. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (JSTCE)-HUCE*. 15(4): 1-14.
- Reddy J. (2000). Analysis of functionally graded plates. *International Journal for numerical methods in engineering*. 47(1-3): 663-684.
- Reddy J.N. (2017). Energy principles and variational methods in applied mechanics. John Wiley & Sons.
- Reissner E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 12(2): A69-A77.
- Rezaei A. & Saidi A. (2015). Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of porous materials. *Composite Structures*. 134: 1051-1060.
- Rezaei A. & Saidi A. (2016). Application of Carrera Unified Formulation to study the effect of porosity on natural frequencies of thick porous - cellular plates. *Composites Part B: Engineering*. 91: 361-370.
- Sokolov S. (1952). Circular plate on a generalized foundation. *Inzhinierny Sbornik, Academy of Sciences USSR*. 11.
- Thai C.H., Zenkour A., Wahab M.A. & Nguyen-Xuan H. (2016). A simple four-unknown shear and normal deformations theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric analysis. *Composite Structures*. 139: 77-95.
- Thai H.-T. & Choi D.-H. (2011). A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *Composites Science and Technology*. 71(16): 1850-1858.
- Thai H.-T., Nguyen T.-K., Vo T.P. & Lee J. (2014). Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 45: 211-225.
- Tlidji Y., Daouadji T.H., Hadji L., Tounsi A. & Bedia E.A.A. (2014). Elasticity solution for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading. *Journal of Thermal Stresses*. 37(7): 852-869.
- Torabi J., Kiani Y. & Eslami M. (2013). Linear thermal buckling analysis of truncated hybrid FGM conical shells. *Composites Part B: Engineering*. 50: 265-272.
- Tornabene F. (2009). Free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 198(37-40): 2911-2935.
- Tounsi A., Houari M.S.A. & Benyoucef S. (2013). A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerospace science and technology*. 24(1): 209-220.
- Tran H.-Q., Vu V.-T. & Tran M.-T. (2023). Free vibration analysis of piezoelectric functionally graded porous plates with graphene platelets reinforcement by pb-2 Ritz method. *Composite Structures*. 305: 116535.
- Tran H.-Q., Vu V.-T., Nguyen V.-L. & Tran M.-T. (2023). Free vibration and nonlinear dynamic response of sandwich plates with auxetic honeycomb core and piezoelectric face sheets. *Thin-Walled Structures*. 191: 111141.
- Trinh L.C., Vo T.P., Osofero A.I. & Lee J. (2016). Fundamental frequency analysis of functionally graded sandwich beams based on the state space approach. *Composite Structures*. 156: 263-275.
- Vafakhah Z. & Neya B.N. (2019). An exact three dimensional solution for bending of thick rectangular FGM plate. *Composites Part B: Engineering*. 156: 72-87.
- Vo T.P., Thai H.-T., Nguyen T.-K. & Inam F. (2014). Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory. *Meccanica*. 49: 155-168.
- Winkler E. (1867). *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit: mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik, für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc.* H. Dominicus.
- Wu D., Liu A., Huang Y., Huang Y., Pi Y. & Gao W. (2018). Dynamic analysis of functionally graded porous structures through finite element analysis. *Engineering Structures*. 165: 287-301.
- Zaoui F.Z., Ouinas D. & Tounsi A. (2019). New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations. *Composites Part B: Engineering*. 159: 231-247.
- Zenkour A. (2005). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1 - Deflection and stresses. *International journal of solids and structures*. 42(18-19): 5224-5242.
- Zenkour A. & Sobhy M. (2010). Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Composite Structures*. 93(1): 93-102.
- Zenkour A.M. (2006). Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*. 30(1): 67-84.
- Zhao X., Lee Y. & Liew K.M. (2009). Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Journal of sound and Vibration*. 319(3-5): 918-939.