

Xây dựng ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng nút của phần tử thanh vát tiết diện chữ I có xét đến ảnh hưởng của lực cắt và độ cứng của liên kết

Build of stiffness matrix and nodal load vector of taper element of section I include shear force and connection stiffness

> **THS PHẠM TRUNG THÀNH⁽¹⁾, TS VŨ THÀNH TRUNG⁽²⁾, PGS.TS NGUYỄN HỒNG SƠN⁽³⁾**

⁽¹⁾ Viện Khoa học công nghệ Xây dựng, E-mail: phamthanh.ibst@gmail.com,

⁽²⁾ Viện Khoa học công nghệ Xây dựng, E-mail: trungvuthanh1975@gmail.com,

⁽³⁾ Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, E-mail: nguyenhongsondhtk@gmail.com

TÓM TẮT:

Bài báo trình bày cách xây dựng ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng nút bằng phương pháp năng lượng của phần tử thanh vát, tiết diện chữ I, có xét đến ảnh hưởng của lực cắt và độ cứng của liên kết, sử dụng cho bài toán phân tích kết cấu. Mô hình toán học của tiết diện là hàm số mũ. Qua đó, xây dựng đoạn chương trình phân tích kết cấu với phần tử vát và kiểm chứng kết quả ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng vừa xây dựng cũng như đánh giá ảnh hưởng của lực cắt và độ cứng của liên kết đến nội lực và chuyển vị của phần tử này.

Từ khóa: Thanh vát; ma trận độ cứng; liên kết nửa cứng

ABSTRACT:

This paper show how to build stiffness matrix and load vector by energy method for taper, I section elements includes the effects of shear and semi-rigid connection, use for structural analysis problem. Mathematical model of the section is exponential. Thereby, programming the structural analysis program for taper elements and verify results stiffness matrix, load vector as well as assessing the effects of shear and semi-rigid connection to force and displacement of this element.

Keywords: Taper elements; stiffness matrix; semi-rigid connection

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong kết cấu công trình, cấu kiện thanh có chiều cao tiết diện thay đổi theo chiều dài được sử dụng rộng rãi hơn trong xây dựng, tiết diện đáp ứng được yêu cầu về kiến trúc, phù hợp hơn về khả năng chịu lực trong kết cấu, và việc chế tạo tiết diện thay đổi cũng không khó đối với các nhà sản xuất.

Đối với kết cấu khung thép, loại tiết diện vát được sử dụng khá nhiều, thông thường các cấu kiện dầm và cột tiết diện chữ I có kích thước bản cánh và chiều dày bản bụng cánh không đổi, chiều cao tiết diện (chiều cao bản bụng) thay đổi. Tỷ lệ thay đổi chiều cao tiết diện phụ thuộc vào phân bố nội lực trong tiết diện theo chiều dài, điều kiện liên kết ở hai đầu cấu kiện.

Các tài liệu về cơ học kết cấu và phương pháp số đã trình bày cách xây dựng ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng nút cho phần tử thanh tiết diện không đổi, với các điều kiện liên kết khác nhau ở hai đầu hoặc ứng với các trường hợp tải trọng khác nhau, các kết quả đã xây dựng được bằng phần tử mẫu. Gần đây, một số tài liệu trong và ngoài nước có đề cập đến việc thiết lập các ma trận độ cứng phần tử thanh tiết diện thay đổi, nhưng chủ yếu là tiết diện chữ nhật với chiều cao thay đổi tuyến tính hoặc xây dựng trên cơ sở hàm dạng của phần tử thanh tiết diện đều và cho kết quả phân tích là gần đúng, phần mềm thương mại SAP 2000 cũng đã đề cập đến bài toán phân tích kết cấu có cấu kiện vát, cấu kiện vát ứng với tiết diện thay đổi tuyến tính, hoặc thay đổi dạng parabol với đặc trưng tiết diện là hàm số mũ bậc hai và bậc ba. Tuy nhiên, để có các ma trận và véc tơ tải trọng nút của phần tử thanh vát, tiết diện chữ I thì cũng cần có các nghiên cứu tiếp theo, để đạt được kết quả của bài toán phân tích kết cấu khung có thanh tiết diện vát chính xác hơn, và để tiếp cận các bài toán tổng quát hơn về phân tích kết cấu khung thép mà phần mềm SAP 2000 chưa đề cập.

Ngoài ra, khi phân tích trạng thái ứng suất, biến dạng của các kết cấu chịu uốn như dầm, khung, tấm... ảnh hưởng của lực cắt và biến dạng trượt thường bị bỏ qua. Tuy nhiên, đối với các phần tử

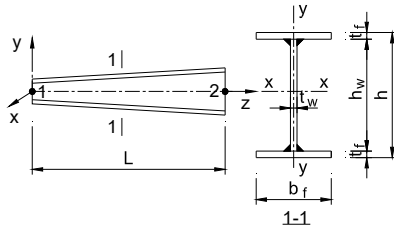
thanh như dầm có thành bụng mỏng thì trường hợp ảnh hưởng của lực cắt cần phải xét đến. Đặc biệt đối với phần tử thanh vát tiết diện chữ I, có liên kết nửa cứng tại hai đầu thì ảnh hưởng của lực cắt cần được xem xét một cách rõ ràng. Bên cạnh đó, trong kết cấu khung thép các cấu kiện như dầm và cột được liên kết với nhau tạo thành hệ kết cấu chịu lực. Nhiều kết quả nghiên cứu cho thấy, các liên kết đều có độ đàn hồi nhất định hay còn gọi là liên kết mềm hoặc liên kết nửa cứng (*semi-rigid connection*). Bài toán phân tích kết cấu khung thép có xét đến độ cứng liên kết đã được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm gần đây, tuy nhiên đối với phần tử thanh vát có xét đến ảnh hưởng của độ cứng liên kết thì hầu như chưa có những nghiên cứu chuyên sâu.

2. MÔ HÌNH PHẦN TỬ THANH VÁT, TIẾT DIỆN CHỮ I

2.1. Đặc trưng hình học của thanh vát

Do cấu kiện dầm và cột vát, tiết diện chữ I được sử dụng rộng rãi làm cấu kiện chịu lực trong khung thép, thường chiều cao của tiết diện thay đổi. Để xác định các đặc trưng hình học của tiết diện tại mỗi vị trí theo chiều dài, gồm có diện tích, mô men quán tính, mô men quán tính xoắn, các đặc trưng tiết diện này biểu diễn về mặt toán học là các công thức quan hệ của các đại lượng về kích thước hình học trong tiết diện là khá phức tạp.

Trong thực tế, để giảm bớt việc tích phân số sau mỗi lần tính và vẫn cho kết quả đạt chính xác, việc biểu diễn các đặc trưng hình học của tiết diện thông qua quy luật hàm số mũ cơ sở e , hoặc theo quy luật hàm số mũ với cơ sở là tỉ lệ độ vát, cũng đã được một số tài liệu đề cập.



Hình 1 - Phần tử dầm tiết diện vát

Theo đó, với phần tử thanh vát có tiết diện chữ I, trong hệ trục tọa độ Oyz, có các đặc trưng tiết diện được xác định:

- Diện tích tiết diện thanh, $A(z)$ Mômen quán tính, $I(z)$:

$$A(z) = A_1 \left(1 + rz/L\right)^m \quad (1)$$

$$I(z) = I_1 \left(1 + rz/L\right)^n \quad (2)$$

trong đó:

$A(z)$ - diện tích tiết diện tại vị trí z ;

$I(z)$ - mômen quán tính tại vị trí z ;

A_1, I_1, h_1 - lần lượt tương ứng là diện tích tiết diện, mômen quán tính, chiều cao tiết diện dầm tại vị trí $z=0$ và $z=L$ ($i=1, 2$);

$$r = h_2/h_1 - 1 : \text{hệ số độ vát}; \quad (3)$$

m, n - các hệ số hình dạng, phụ thuộc vào dạng tiết diện và kích thước của phần tử, ứng với diện tích và mô men quán tính của tiết diện, xác định như sau.

Theo (1) và (2), áp dụng các điều kiện biên tại $z=L$ và $z=0$, ta có:

$z=L$, có $A(z) = A_2$ và $I_x(z) = I_2$; $z=0$, có $A(z) = A_1$ và $I_x(z) = I_1$;

$$m = \frac{\ln(A_2/A_1)}{\ln(h_2/h_1)} \quad \text{và} \quad n = \frac{\ln(I_2/I_1)}{\ln(h_2/h_1)} \quad (4)$$

Nhận thấy rằng, đối với hai đầu tiết diện thì có các đặc trưng hình học chính xác, tuy nhiên tại vị trí giữa dầm thì có sai số nhất định. Để minh chứng điều này dưới đây ta khảo sát một số tiết diện.

2.2. Hệ số hình dạng của một số tiết diện

Với các tiết diện chữ I, hộp và chữ nhật đặc, khi cho bề rộng và chiều dày cấu kiện không đổi và thay đổi chiều cao tiết diện, theo đó giá trị của hệ số hình dạng, n và m , nằm trong giới hạn được ghi ở Bảng 1.

Bảng 1. Giá trị hệ số hình dạng

Stt	Tiết diện	Hệ số	
		n	m
1	chữ nhật	2,1 ÷ 2,6	Thay đổi
2	hình hộp rỗng	2,1 ÷ 2,6	Thay đổi
3	hình hộp đặc	3,0	1,0

2.3. Khảo sát sai số khi biểu diễn đặc trưng hình học là hàm số mũ

Như trên đã đề cập, việc biểu diễn các đặc trưng tiết diện theo hàm số mũ có những tiện lợi trong tính toán, nhưng sẽ có sai số nhất định so với việc tính toán theo công thức chính xác. Theo đó, khảo sát sai số này đối với một số tiết diện dầm chữ I phổ biến trong thực tế, vị trí khảo sát là điểm giữa phần tử, các đặc trưng hình học khảo sát gồm diện tích, mô men quán tính trong và ngoài mặt phẳng uốn, mô men quán tính xoắn và giá trị hệ số độ vát thay đổi từ 0; 1,0; 2,0; 3,0; 4,0. Kết quả khảo sát được ghi ở Bảng 2 đến Bảng 6.

Dưới đây sử dụng ký hiệu $I-b_f \times (h_1 \div h_2) \times t_w \times t_f$ (mm) để biểu thị thông số hình học của thanh vát tiết diện chữ I. Trong đó: b_f - bề rộng cánh, h_1 - chiều cao tại đầu 1, h_2 - chiều cao tại đầu 2, t_w - bề rộng bản bụng, t_f - bề rộng bản cánh.

Bảng 2. Kết quả chênh lệch (%) giá trị thông số đặc trưng hình học

r	250x(350÷950)x6x8		250x(350÷950)x10x12	
	$A(z)$	$I_x(z)$	$A(z)$	$I_x(z)$
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00
1.0	1.44	0.76	1.46	0.73
2.0	3.53	2.24	3.52	2.20
3.0	5.39	3.87	5.32	3.83
4.0	6.93	5.45	6.79	5.40

r	150x(350÷950)x10x12		150x(450÷950)x10x12	
	$A(z)$	$I_x(z)$	$A(z)$	$I_x(z)$
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00
1.0	1.40	1.00	1.31	1.16
2.0	3.20	2.77	2.92	3.04
3.0	4.64	4.54	4.17	4.83
4.0	5.74	6.13	5.10	6.37

Qua bảng so sánh ta có thể thấy khi độ vát $r \leq 3$ thì sai số lớn nhất của A, I_x khoảng 5%. Sai số này có thể chấp nhận được. Nội dung bài báo này chỉ xét đến phần tử thanh có độ vát $r \leq 3$.

3. XÂY DỰNG MA TRẬN ĐỘ CỨNG VÀ VÉC TƠ TẢI TRỌNG NÚT CHO PHẦN TỬ THANH VÁT, TIẾT DIỆN CHỮ I, HAI ĐẦU LIÊN KẾT CỨNG

3.1. Phương pháp xây dựng ma trận

Sử dụng cách xây dựng ma trận độ cứng được trình bày tại mục 4.4 của sách Matrix Structural Analysis của William McGuire, ta có ma trận độ cứng của phần tử được xây dựng theo công thức sau:

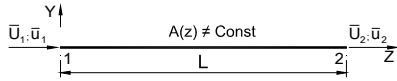
$$[k] = \begin{bmatrix} [d]^{-1} & [d]^{-1}[\Phi]^T \\ [\Phi][d]^{-1} & [\Phi][d]^{-1}[\Phi]^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

trong đó: $[d] = [k_{ii}]^{-1}$ - là ma trận liên hệ giữa véc tơ chuyển vị nút và phản lực nút. $[\Phi]$ - Ma trận biểu diễn liên hệ giữa thành phần nội lực của các nút.

3.2. Xây dựng ma trận độ cứng cho phần tử thanh vát tiết diện chữ I, hai đầu liên kết cứng

3.2.1. Xây dựng ma trận độ cứng phần tử thanh chịu kéo - nén

Phần tử thanh vát có tiết diện chữ I (chiều dày bản bụng và kích thước bản cánh không đổi), chiều dài là L và các đặc trưng tiết diện tại vị trí z bất kỳ $I(z)$, $A(z)$.



Hình 2 - Phần tử thanh kéo - nén

Chuyển vị tại điểm 2 dưới tác dụng của lực U_2 là:

$$u_2 = \int_0^L \frac{\sigma dx}{E} = \int_0^L \frac{U_2 dx}{EA(z)} = \frac{U_2 L}{EA(z)} \quad (11)$$

trong đó: E - mô đun đàn hồi của vật liệu thanh;

$A(z)$ - diện tích tiết diện thanh tại vị trí z .

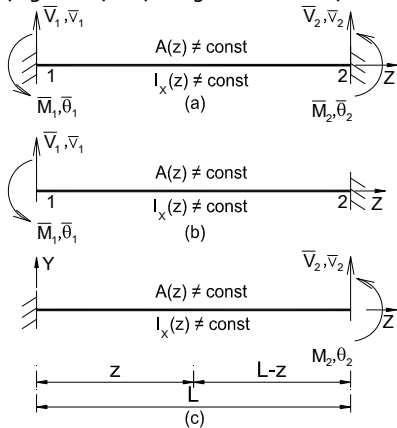
$$\text{Do đó: ma trận } [d] = L/[EA(z)] \quad (12)$$

Từ phương trình cân bằng ta có: $U_1 = -U_2$ suy ra $[\Phi] = -1$. Theo

đó ma trận độ cứng k của thanh kéo - nén:

$$\bar{k}_{kn} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{14} \\ \bar{k}_{41} & \bar{k}_{44} \end{bmatrix} = \frac{EA(z)}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

3.2.2 Xây dựng ma trận độ cứng cho thanh chịu uốn phẳng



Hình 3a, b, c - Thành phần nội lực và chuyển vị của phần tử thanh chịu uốn

a) Xây dựng ma trận liên hệ giữa véc tơ chuyển vị nút và phản lực nút. Khi xét thông số $\bar{v}_1$ và $\bar{\theta}_1$, ta cố định đầu 2 của thanh như Hình 3b.

Trong bài toán phẳng, với các ứng lực mô men (M), lực cắt (V) thì biểu thức của thế năng biến dạng đàn hồi đối với thanh đàn hồi tuyến tính chịu lực tổng quát có chiều dài L như sau:

$$\bar{C} = \int_0^L \frac{M(z)^2 dz}{2EI(z)} + \int_0^L \frac{\gamma(z)V(z)^2 dz}{2GA(z)} \quad (14)$$

trong đó:

$\bar{C}$ - thế năng biến dạng đàn hồi;

$M(z)$ - biểu thức của mô men uốn tại mặt cắt có tọa độ z ;

$V(z)$ - biểu thức của lực cắt tại mặt cắt có tọa độ z ;

$EI(z)$ - độ cứng chống uốn của tiết diện (độ cứng chống uốn

trong mặt phẳng yz) tại mặt cắt có tọa độ z ;

G - mô đun đàn hồi trượt;

$GA(z)$ - độ cứng chịu cắt của tiết diện tại mặt cắt có tọa độ z ;

$\gamma(z)$ - hệ số phụ thuộc vào hình dạng tiết diện theo phương y tại mặt cắt có tọa độ z , phản ánh sự phân bố không đều của ứng suất tiếp;

Đối với tiết diện chữ I hoặc chữ nhật rỗng $\gamma(z) = A(z)/A_t(z)$;

$A_t(z)$ - diện tích tiết diện theo phương thẳng đứng (phần bụng) tại vị trí z .

Tuy nhiên để thuận tiện trong tính toán có thể biểu diễn hệ số $\gamma(z) = A(z)/A_t(z)$ thông qua quy luật hàm số mũ với cơ số là tỉ lệ độ vát theo công thức như sau:

$$\gamma(z) = \gamma_1 (1 + rz/L)^p \quad (15)$$

γ_1, γ_2 - lần lượt là hệ số phụ thuộc vào hình dạng tiết diện theo

phương y tại mặt cắt có tọa độ $z = 0$ và tại $z = L$;

$$\text{Hệ số } p = \frac{\ln(\gamma_2/\gamma_1)}{\ln(h_2/h_1)}; \quad (16)$$

Ứng với Hình 3b, mô men và lực cắt tại vị trí z của phần tử thanh được xác định từ phương trình cân bằng mô men đối với nút 1 và phương trình cân bằng lực cắt:

$$M(z) = \bar{V}_2(L - z) + \bar{M}_2 \quad (17a)$$

$$V(z) = -\bar{V}_2 \quad (17b)$$

Thay (17a) và (17b) vào (14) ta được:

$$\bar{C} = \int_0^L \frac{[\bar{V}_2(L - z) + \bar{M}_2]^2 dz}{2EI(z)} + \int_0^L \frac{\gamma(z)\bar{V}_2^2 dz}{2GA(z)} \quad (18)$$

Áp dụng định lý Castigliano, ta có:

$$\bar{v}_2 = \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{V}_2} = \int_0^L \frac{[\bar{V}_2(L - z) + \bar{M}_2](L - z) dz}{EI(z)} + \int_0^L \frac{\gamma(z)\bar{V}_2 dz}{GA(z)}; \quad (19a)$$

$$\bar{\theta}_2 = \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{M}_2} = \int_0^L \frac{[\bar{V}_2(L - z) + \bar{M}_2] dz}{EI(z)}; \quad (19b)$$

Viết lại (19a) và (19b):

$$\bar{M}_2 \int_0^L \frac{(L - z) dz}{EI(z)} + \bar{V}_2 \left(\int_0^L \frac{(L - z)^2 dz}{EI(z)} + \int_0^L \frac{\gamma(z) dz}{GA(z)} \right) = \bar{v}_2 \quad (19c)$$

$$\bar{M}_2 \int_0^L \frac{dz}{EI(z)} + \bar{V}_2 \int_0^L \frac{(L - z) dz}{EI_x(z)} = \bar{\theta}_2 \quad (19d)$$

trong đó: $\beta = E/G$;

$\bar{M}_1, \bar{M}_2$ - mô men tại đầu 1 và 2;

$\bar{V}_1, \bar{V}_2$ - lực cắt tại đầu 1 và 2;

$\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ - góc xoay tại đầu 1 và 2;

$\bar{v}_1, \bar{v}_2$ - chuyển vị theo phương vuông góc với trục thanh tại nút 1 và 2.

Phương trình (19c) và (19d) được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\text{trong đó: } \bar{a}_{11} = \int_0^L \frac{(L - z)^2 dz}{EI(z)} + \int_0^L \frac{\beta \gamma(z) dz}{EA(z)} \quad (21a)$$

$$\bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \int_0^L \frac{(L - z) dz}{EI(z)} \quad (21b)$$

$$\bar{a}_{22} = \int_0^L \frac{dz}{EI(z)} \quad (21c)$$

Đặt các tích phân cơ bản như sau:

$$\bullet T_1 = \int_0^L \frac{dz}{I_x(z)} = \frac{L(1+r)^{1-n}}{I_r(1-n)};$$

$$\begin{aligned}
 \bullet T_2 &= \int_0^L \frac{zdz}{I_x(z)} = \frac{L^2}{I_r^2} \frac{(1+r)^{1-n} [r(1-n)-1] + 1}{(1-n)(2-n)} \\
 \bullet T_3 &= \int_0^L \frac{z^2 dz}{I_x(z)} = \frac{L^3}{I_r^3} \frac{\left\{ [2+2(n-1)r+(n-1)(n-2)r^2](1+r)^{1-n} - 2 \right\}}{(1-n)(2-n)(3-n)}; \\
 \bullet T_4 &= \int_0^L \frac{z^3 dz}{I_x(z)} \\
 &= \frac{L^4}{I_r^4} \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \left((r+1)^{-n} \left\{ r \begin{bmatrix} -6n-3(n-1)nr \\ -n[2+(n-3)n]r^2 \\ -(n-3)(n-2)(n-1)r^3 \\ +6[-1+(r+1)^n] \end{bmatrix} \right\} \right) \\
 T_5 &= \int_0^L \frac{z^4 dz}{I_x(z)} \\
 &= \frac{L^5 (1+r)^{-n}}{(-5+n)(-4+n)(-3+n)(-2+n)(-1+n)r^5} \left(r \begin{bmatrix} -24n-12(-1+n)nr \\ -4n(2+(-3+n)n)r^2 \\ -(-3+n)(-2+n)(-1+n)nr^3 \\ -(-4+n) \begin{pmatrix} -3 \\ +n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ +n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ +n \end{pmatrix} r^4 \\ +24[-1+(1+r)^n] \end{bmatrix} \right) \\
 \bullet T_6 &= \int_0^L \frac{\gamma(z)}{A(z)} dz = \frac{\gamma_1 L}{A_r} \frac{-1+(1+r)^{(1-m+p)}}{1-m+p}; \\
 \bullet T_7 &= \int_0^L \frac{\gamma(z)}{A(z)} z dz = \frac{\gamma_1 L^2}{A_r r^2} \frac{1+(1+r)^{(1-m+p)} [-1+(1-m+p)r]}{(-2+m-p)(-1+m-p)}; \\
 \bullet T_8 &= \int_0^L \frac{\gamma(z)}{A(z)} z^2 dz = \frac{\gamma_1 L^3}{A_r r^3} \frac{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ +r \end{pmatrix}^{-m} \left[2(1+r)^m - \begin{pmatrix} 1 \\ +r \end{pmatrix}^{(1+p)} \begin{bmatrix} 2+\begin{pmatrix} -1 \\ +m-p \end{pmatrix} r \\ 2+\begin{pmatrix} -2 \\ +m-p \end{pmatrix} r \end{bmatrix} \right] \right)}{(-3+m-p)(-2+m-p)(-1+m-p)} \quad (22)
 \end{aligned}$$

Khi đó các hệ số $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_{21}, \bar{a}_{22}$ được viết lại như sau:

$$\bar{a}_{11} = (L^2 T_1 - 2L T_2 + T_3 + \beta T_6) / E \quad (23a)$$

$$\bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = (L T_1 - T_2) / E \quad (23b)$$

$$\bar{a}_{22} = T_1 / E \quad (23d)$$

$$\text{Ma trận liên hệ giữa chuyển vị và ngoại lực } [d] = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix}$$

b) Xây dựng ma trận liên hệ giữa các thành phần phản lực tại các nút

Ứng với Hình 3a, xét cân bằng mô men và lực cắt quanh nút 1 ta được biểu thức liên hệ giữa phản lực tại nút 1 và nút 2 như sau:

$$\bar{V}_1 = -\bar{V}_2 \quad (24a)$$

$$\bar{M}_1 = -\bar{V}_2 L - \bar{M}_2 \quad (24b)$$

Viết lại dưới dạng ma trận ta có:

$$\begin{Bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{M}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Do đó, ma trận $[\Phi]$ như sau:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

c) Xây dựng ma trận độ cứng

Áp dụng công thức (10d) đã nêu ở mục 3.1 ma trận độ cứng được xác định như sau:

$$[\bar{k}_u] = \begin{bmatrix} [d]^{-1} & [d]^{-1} [\Phi]^T \\ [\Phi][d]^{-1} & [\Phi][d]^{-1} [\Phi]^T \end{bmatrix} \quad (27a)$$

$$\text{Với: } [d]^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{55} & \bar{k}_{56} \\ \bar{k}_{65} & \bar{k}_{66} \end{bmatrix}; [d]^{-1} [\Phi]^T = \begin{bmatrix} \bar{k}_{52} & \bar{k}_{53} \\ \bar{k}_{62} & \bar{k}_{63} \end{bmatrix};$$

$$[\Phi][d]^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{25} & \bar{k}_{26} \\ \bar{k}_{35} & \bar{k}_{36} \end{bmatrix};$$

$$[\Phi][d]^{-1} [\Phi]^T = \begin{bmatrix} \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} \\ \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} \end{bmatrix};$$

Ta tính được các phần tử của ma trận độ cứng $\bar{k}_{ij}$ theo thứ tự của (27b). Sau đó ta viết lại ma trận độ cứng theo thứ tự như sau:

$$[\bar{k}_u] = \begin{bmatrix} \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} & \bar{k}_{25} & \bar{k}_{26} \\ \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{35} & \bar{k}_{36} \\ dx & & \bar{k}_{55} & \bar{k}_{56} \\ & & \bar{k}_{65} & \bar{k}_{66} \end{bmatrix} \quad (27c)$$

trong đó:

$$\bar{k}_{22} = \frac{12EI_1}{L^3} \frac{L^3 T_1}{12I_1 [-T_2^2 + T_1(T_3 + \beta T_6)]}$$

$$\bar{k}_{23} = \bar{k}_{32} = \frac{6EI_1}{L^2} \frac{L^2 T_2}{6I_1 [-T_2^2 + T_1(T_3 + \beta T_6)]}$$

$$\bar{k}_{25} = \bar{k}_{52} = -\frac{12EI_1}{L^3} \frac{L^3 T_1}{12I_1 [-T_2^2 + T_1(T_3 + \beta T_6)]}$$

$$\bar{k}_{26} = \bar{k}_{62} = \frac{6EI_1}{L^2} \frac{L^2 (LT_1 - T_2)}{6I_1 [-T_2^2 + T_1(T_3 + \beta T_6)]}$$

$$\bar{k}_{33} = \frac{4EI_1}{L} \frac{L(T_3 + \beta T_6)}{4I_1 [-T_2^2 + T_1(T_3 + \beta T_6)]}$$

$$\bar{k}_{35} = \bar{k}_{53} = -\frac{6EI_1}{L^2} \frac{L^2 T_2}{6I_1 [-T_2^2 + T_1(T_3 + \beta T_6)]}$$

$$\bar{k}_{36} = \bar{k}_{63} = \frac{2EI_1}{L} \frac{L(-LT_2 + T_3 + \beta T_6)}{2I_1 [-T_2^2 + T_1(T_3 + \beta T_6)]}$$

$$\bar{k}_{55} = \frac{12EI_1}{L^3} \frac{L^3 T_1}{12I_1 [-T_2^2 + T_1(T_3 + \beta T_6)]}$$

$$\bar{k}_{56} = \bar{k}_{65} = -\frac{6EI_1}{L^2} \frac{L^2 (-LT_1 + T_2)}{6I_1 [-T_2^2 + T_1(T_3 + \beta T_6)]}$$

$$\bar{k}_{66} = \frac{4EI_1}{L} \frac{L(L^2 T_1 - 2LT_2 + T_3 + \beta T_6)}{4I_1 [-T_2^2 + T_1(T_3 + \beta T_6)]} \quad (28)$$

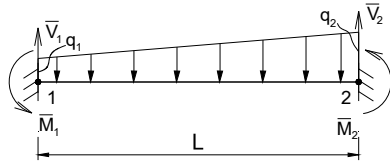
Thành phần của ma trận độ cứng đối với phần tử thanh chịu uốn chính là các giá trị $\bar{k}_{ij}$ ($i, j = 2, 3, 5, 6$) thu được ở mục 3.2.3.

Ma trận độ cứng của phần tử thanh kéo - nén uốn trong mặt phẳng là "tổng" của ma trận độ cứng thanh kéo - nén với độ cứng thanh uốn. "tổng" có nghĩa sắp xếp theo thứ tự:

$$\bar{K}_e = " \bar{K}_{kn} " + " \bar{K}_u " \quad (31)$$

3.3. Véc tơ tải trọng nút

3.3.1. Tải trọng phân bố hình thang



Hình 4 - Phần tử thanh uốn, có liên kết cứng chịu tải trọng phân bố hình thang

a) Xác định chuyển vị và góc xoay tại nút 1 ($\bar{v}_1; \bar{\theta}_1$)

Phương trình cân bằng mô men đối với nút 2 và phương trình cân bằng lực cắt của dầm theo Hình 4:

$$\bar{M}_1 + \bar{M}_2 - \bar{V}_1 L + (2q_1 + q_2)L^2 / 6 = 0 \quad (32a)$$

$$\bar{V}_2 + \bar{V}_1 = 0,5(q_1 + q_2)L \quad (32b)$$

Mô men và lực cắt tại vị trí z của thanh xác định từ phương trình cân bằng mô men đối với phần bên trái và phương trình cân bằng lực cắt, ta được:

$$\bar{M}(z) = \bar{V}_1 z - \bar{M}_1 - q_1 z^2 / 2 + (q_1 - q_2)z^3 / (6L) \quad (32c.)$$

$$\bar{V}(z) = \bar{V}_1 - [q_1 + q_1 - (q_1 - q_2)z / L]z / 2 \quad (32d)$$

Thay (32c) và (32d) vào (14) ta được:

$$\bar{C} = \int_0^L \frac{\left(\bar{V}_1 z - \bar{M}_1 - \frac{q_1 z^2}{2} + \frac{(q_1 - q_2)z^3}{6L} \right)^2}{2EI_x(z)} dz + \int_0^L \frac{\gamma(z) \left[\bar{V}_1 - q_1 z + (q_1 - q_2) \frac{z^2}{2L} \right]^2}{2GA(z)} dz \quad (33)$$

Áp dụng định lý Castigliano, ta có:

$$\bar{v}_1 = \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{V}_1} = \int_0^L \frac{\left(\bar{V}_1 z - \bar{M}_1 - \frac{q_1 z^2}{2} + \frac{(q_1 - q_2)z^3}{6L} \right) z dz}{EI_x(z)} + \int_0^L \frac{\gamma(z) \left[\bar{V}_1 - q_1 z + (q_1 - q_2) \frac{z^2}{2L} \right] \frac{z^2}{2L} dz}{GA(z)} \quad (34a)$$

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{M}_1} = \int_0^L \frac{\left(-\bar{V}_1 z + \bar{M}_1 + \frac{q_1 z^2}{2} - \frac{(q_1 - q_2)z^3}{6L} \right) dz}{EI_x(z)} \quad (34b)$$

Rút gọn biểu thức; thay tích phân cơ bản và áp dụng điều kiện biên tại nút 1: Chuyển vị thẳng vuông góc với trục thanh và chuyển vị xoay tại nút 1 bằng 0 ($\bar{v}_1 = 0, \bar{\theta}_1 = 0$) thu được phương trình như sau:

$$M_1(-T_2) + V_1(T_3 + \beta T_6) - \frac{q_1}{2} T_4 - q_1 \beta T_7 + (T_5 + 3\beta T_8)(q_1 - q_2) / (6L) = 0;$$

$$M_1 T_1 - V_1 T_2 + q_1 T_3 / 2 - T_4 (q_1 - q_2) / (6L) = 0; \quad (35a.b)$$

trong đó: $\beta = E / G$.

Giải hệ phương trình (35a.b) với ẩn số là $\bar{M}_1$ và $\bar{V}_1$ ta thu được:

$$\bar{V}_1 = \frac{\{3Lq_1[T_2 T_3 - T_1(T_4 + 2\beta T_7)] - (q_1 - q_2)[T_2 T_4 - T_1(T_5 + 3\beta T_8)]\}}{6L[T_2^2 - T_1(T_3 + \beta T_6)]}$$

$$\bar{M}_1 = \frac{\left\{ 3Lq_1[T_3^2 + \beta T_3 T_6 - T_2(T_4 + 2\beta T_7)] - (q_1 - q_2)\left[T_3 T_4 + \beta T_4 T_6 - T_2\left(\frac{T_5}{3\beta T_8}\right)\right] \right\}}{6L[T_2^2 - T_1(T_3 + \beta T_6)]} \quad (36a.b)$$

Thay (36a.b) vào phương trình cân bằng (32a.b) ta thu được $\bar{M}_2$ và $\bar{V}_2$:

$$\bar{V}_2 = \frac{\left\{ 3L^2(q_1 + q_2)[T_2^2 - T_1(T_3 + \beta T_6)] + 3Lq_1[-T_2 T_3 + T_1(T_4 + 2\beta T_7)] \right\} + (q_1 - q_2)[T_2 T_4 - T_1(T_5 + 3\beta T_8)]}{6L[T_2^2 - T_1(T_3 + \beta T_6)]} \quad (36c)$$

$$\bar{M}_2 = \frac{\begin{aligned} & -L^3(2q_1 + q_2)[T_2^2 - T_1(T_3 + \beta T_6)] \\ & + 3L^2q_1[T_2 T_3 - T_1(T_4 + 2\beta T_7)] + (q_1 - q_2)\left[T_3 T_4 + \beta T_4 T_6 - T_2(T_5 + 3\beta T_8)\right] \\ & + L \left\{ \begin{aligned} & q_2[T_2 T_4 - T_1(T_5 + 3\beta T_8)] \\ & -3T_3^2 - 3\beta T_3 T_6 \\ & + q_1[2T_2(T_4 + 3\beta T_7) \\ & + T_1(T_5 + 3\beta T_8)] \end{aligned} \right\} \end{aligned}}{6L[T_2^2 - T_1(T_3 + \beta T_6)]} \quad (36d)$$

Từ kết quả trên thu được véc tơ tải trọng nút của thanh uốn chịu tải trọng phân bố đều:

$$\{\bar{F}\} = \{\bar{V}_1 \quad \bar{M}_1 \quad \bar{V}_2 \quad \bar{M}_2\}^T \quad (37)$$

4. XÂY DỰNG MA TRẬN ĐỘ CỨNG VÀ VÉC TƠ TẢI TRỌNG NÚT CHO PHẦN TỬ THANH VÁT TIẾT DIỆN CHỮ I LIÊN KẾT NỬA CỨNG TẠI HAI ĐẦU

4.1. Phương pháp xây dựng ma trận

Tương tự mục 3.1.

4.2. Ma trận độ cứng xây dựng ma trận độ cứng thanh chịu uốn

Phần tử thanh phẳng có mô men (M), lực cắt (V) thì biểu thức của thế năng biến dạng đàn hồi của thanh đàn hồi tuyến tính chịu lực tổng quát có chiều dài L như sau:

$$\bar{C} = \int_0^L \frac{M(z)^2 dz}{2EI(z)} + \int_0^L \frac{\gamma(z)V(z)^2 dz}{2GA(z)} \quad (38a)$$

Phần thế năng của nút có xét độ cứng:

$$C^* = 0,5k_1(\bar{M}_1^* / k_1)^2 + 0,5k_1(\bar{M}_2^* / k_2)^2 \quad (39)$$

trong đó: $k_1; k_2; \bar{M}_1^*; \bar{M}_2^*$ lần lượt là độ cứng và mô men uốn của nút 1 và 2.

Tổng thế năng đàn hồi của phần tử thanh tiết diện vát có liên kết nửa cứng:

$$\bar{C}^* = \bar{C} + C^* = \int_0^L \frac{M(z)^2 dz}{2EI(z)} + \int_0^L \frac{\gamma(z)V(z)^2 dz}{2GA(z)} + 0,5k_1(\bar{M}_1^* / k_1)^2 + 0,5k_1(\bar{M}_2^* / k_2)^2 \quad (38c)$$

Theo Hình 3b, mô men và lực cắt tại vị trí z của thanh xác định từ phương trình cân bằng mô men đối với phần bên trái và phương trình cân bằng lực cắt:

$$\bar{M}^*(z) = \bar{V}_2^*(L - z) + \bar{M}_2^* \quad (39a)$$

$$\bar{V}^*(z) = -\bar{V}_2^* \quad (39b)$$

Thay (39a) và (39b) vào (38c) ta được:

$$\bar{C}^* = \int_0^L \frac{[\bar{V}_2^*(L - z) + \bar{M}_2^*]^2 dz}{2EI(z)} + \int_0^L \frac{\gamma(z)\bar{V}_2^{*2} dz}{2GA(z)} + \bar{M}_2^{*2} / (2k_1) + \bar{M}_2^{*2} / (2k_2) \quad (40)$$

Phương trình cân bằng mô men và lực cắt của dầm theo Hình 3c là:

$$\bar{M}_1^* + \bar{M}_2^* + \bar{V}_2^* L = 0 \quad (41a)$$

$$\bar{V}_1^* + \bar{V}_2^* = 0 \quad (41b)$$

Thay (41a) và (41b) vào (40) được:

$$\bar{C}^* = \int_0^L \frac{[\bar{V}_2^*(L - z) + \bar{M}_2^*]^2 dz}{2EI(z)} + \int_0^L \frac{\gamma(z)\bar{V}_2^{*2} dz}{2GA(z)} + (\bar{M}_2^* + \bar{V}_2^* L)^2 / (2k_1) + \bar{M}_2^{*2} / (2k_2)$$

Áp dụng định lý Castigliano, ta có:

$$\begin{aligned}\bar{v}_2^* &= \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial \bar{V}_2^*} = \int_0^L \frac{[\bar{V}_2^*(L-z) + \bar{M}_2^*](L-z)dz}{EI(z)} + \int_0^L \frac{\gamma(z)\bar{V}_2^*dz}{GA(z)} + \frac{(\bar{M}_2^* + \bar{V}_2^*L)}{k_1} \\ \bar{\theta}_2^* &= \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial \bar{M}_2^*} = \int_0^L \frac{[\bar{V}_2^*(L-z) + \bar{M}_2^*]dz}{EI(z)} + \frac{(\bar{M}_2^* + \bar{V}_2^*L)}{k_1} + \frac{\bar{M}_2^*}{k_2}\end{aligned}\quad (42a,b)$$

Đặt: $\alpha_1 = k_1 / E$; $\alpha_2 = k_2 / E$; $\beta = E / G$ ta có:

$$\bar{M}_2^* \left(\int_0^L \frac{(L-z)dz}{EI(z)} + \frac{L}{E\alpha_1} \right) + \bar{V}_2^* \left(\int_0^L \frac{(L-z)^2 dz}{EI(z)} + \int_0^L \frac{\beta\gamma(z)dz}{EA(z)} + \frac{L^2}{E\alpha_1} \right) = \bar{v}_2^* \quad (43a)$$

$$\bar{M}_2^* \left(\int_0^L \frac{dz}{EI(z)} + \frac{1}{E\alpha_1} + \frac{1}{E\alpha_2} \right) + \bar{V}_2^* \left(\int_0^L \frac{(L-z)dz}{EI(z)} + \frac{L}{E\alpha_1} \right) = \bar{\theta}_2^* \quad (43b)$$

Phương trình (43a) và (43b) được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_2^* \\ \bar{\theta}_2^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{a}_{11}^* & \bar{a}_{12}^* \\ \bar{a}_{21}^* & \bar{a}_{22}^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_2^* \\ \bar{M}_2^* \end{Bmatrix}$$

trong đó:

$$\bar{a}_{11}^* = \int_0^L \frac{(L-z)^2 dz}{EI(z)} + \int_0^L \frac{\beta\gamma(z)dz}{EA(z)} + \frac{L^2}{E\alpha_1} \quad (44a, b, c)$$

$$\bar{a}_{12}^* = \bar{a}_{21}^* = \int_0^L \frac{(L-z)dz}{EI(z)} + \frac{L}{E\alpha_1}$$

$$\bar{a}_{22}^* = \int_0^L \frac{dz}{EI(z)} + \frac{1}{E\alpha_1} + \frac{1}{E\alpha_2}$$

Thay các giá trị tích phân cơ bản từ T_1 đến T_8 vào (44a,b,c) ta có:

$$\bar{a}_{11}^* = (L^2 T_1 - 2L T_2 + T_3 + \beta T_6 + L^2 / \alpha_1) / E \quad (45a, b, c)$$

$$\bar{a}_{12}^* = \bar{a}_{21}^* = (L T_1 - T_2 + L / \alpha_1) / E$$

$$\bar{a}_{22}^* = (T_1 + 1 / \alpha_1 + 1 / \alpha_2) / E$$

$$\text{Ma trận độ cứng } [\bar{K}_u^*] = \begin{bmatrix} \bar{k}_{22}^* & \bar{k}_{23}^* & \bar{k}_{25}^* & \bar{k}_{26}^* \\ \bar{k}_{33}^* & \bar{k}_{35}^* & \bar{k}_{36}^* & \bar{k}_{55}^* \\ dx & & & \end{bmatrix} \quad (46)$$

với:

$$MS = L^2 (1 + \alpha_1 T_1) - 2\alpha_1 L T_2 - \alpha_1 \alpha_2 T_2^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) T_3 + \alpha_1 \alpha_2 T_1 T_3 + \beta \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 T_1} \right) T_6$$

$$\bar{k}_{22}^* = \frac{E(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T_1)}{MS}; \bar{k}_{23}^* = \bar{k}_{32}^* = \frac{\alpha_1 E(L + \alpha_2 T_2)}{MS}$$

$$\bar{k}_{25}^* = \bar{k}_{52}^* = -\frac{E(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T_1)}{MS}; \bar{k}_{26}^* = \bar{k}_{62}^* = \frac{E\alpha_2(L + \alpha_1 L T_1 - \alpha_1 T_2)}{MS}$$

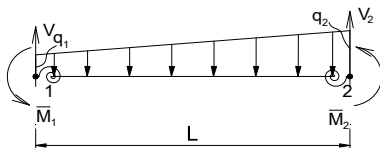
$$\bar{k}_{33}^* = \frac{E\alpha_1[L^2 + \alpha_2(T_3 + \beta T_6)]}{MS}; \bar{k}_{35}^* = \bar{k}_{53}^* = -\frac{\alpha_1 E(L + \alpha_2 T_2)}{MS}$$

$$\bar{k}_{36}^* = \bar{k}_{63}^* = \frac{\alpha_1 \alpha_2 E(L T_2 - T_3 - \beta T_6)}{MS}; \bar{k}_{55}^* = \frac{E(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T_1)}{MS}$$

$$\bar{k}_{56}^* = \bar{k}_{65}^* = -\frac{E\alpha_2(L + \alpha_1 L T_1 - \alpha_1 T_2)}{MS}; \bar{k}_{66}^* = \frac{E\alpha_2 \left(L^2 (1 + \alpha_1 T_1) - 2\alpha_1 L T_2 + \alpha_1 (T_3 + \beta T_6) \right)}{MS} \quad (47)$$

4.3. Xây dựng véc tơ tải trọng nút cho phần tử thanh vát, liên kết nửa cứng

4.3.1. Tải trọng phân bố hình thang



Hình 5 - Phần tử thanh có liên kết nửa cứng, tải trọng phân bố hình thang

a) Xác định chuyển vị và góc xoay tại nút 2 ($\bar{v}_2^*$; $\bar{\theta}_2^*$)

Phương trình cân bằng mô men với nút 1 và phương trình cân bằng lực cắt:

$$\bar{M}_1^* + \bar{M}_2^* + \bar{V}_2^* L - (q_1 + 2q_2)L^2 / 6 = 0 \quad (48a)$$

$$\bar{V}_2^* + \bar{V}_1^* = 0,5(q_1 + q_2)L \quad (48b)$$

Mô men và lực cắt tại vị trí z của thanh được xác định từ phương trình cân bằng mô men đối với phần bên trái và phương trình cân bằng lực cắt, ta được:

$$\bar{M}^*(z) = \bar{V}_2^*(L-z) + \bar{M}_2^* - q_2(2L+z)(L-z)^2 / 6L - q_1(L-z)^3 / 6L; \quad (49a)$$

$$\bar{V}^*(z) = [q_1 - (q_1 - q_2)z / L + q_2](L-z) / 2 - \bar{V}_2^*; \quad (49b)$$

Thay (49a) và (49b) vào (38c) được:

$$\begin{aligned}\bar{C}^* &= \int_0^L \frac{[\bar{V}_2^*(L-z) + \bar{M}_2^* - q_2(2L+z)(L-z)^2 / 6L - q_1(L-z)^3 / 6L]^2 dz}{2EI(z)} \\ &+ \int_0^L \frac{\gamma(z) \left[\frac{q_2}{2L}(L^2 - z^2) + \frac{q_1}{2L}(L-z)^2 - \bar{V}_2^* \right]^2 dz}{2GA(z)} + \frac{\left(\frac{L^2}{6}(q_1 + 2q_2) - \bar{M}_2^* - \bar{V}_2^* L \right)^2}{2k_1} + \frac{\bar{M}_2^{*2}}{2k_2}\end{aligned} \quad (50)$$

Áp dụng định lý Castigliano, ta có:

$$\bar{v}_2^* = \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial \bar{V}_2^*} = \int_0^L \frac{[\bar{V}_2^*(L-z) + \bar{M}_2^* - \frac{q_2}{6L}(2L+z)(L-z)^2 - \frac{q_1}{6L}(L-z)^3](L-z)dz}{EI(z)} \quad (51a)$$

$$\begin{aligned}&+ \int_0^L \frac{\gamma(z) \left[\bar{V}_2^* - \frac{q_2}{2L}(L^2 - z^2) - \frac{q_1}{2L}(L-z)^2 \right] dz}{GA(z)} + \frac{\left[-\frac{L^2}{6}(q_1 + 2q_2) + \bar{M}_2^* + \bar{V}_2^* L \right] L}{k_1} \\ \bar{\theta}_2^* &= \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial \bar{M}_2^*} = \int_0^L \frac{[\bar{V}_2^*(L-z) + \bar{M}_2^* - \frac{q_2}{6L}(2L+z)(L-z)^2 - \frac{q_1}{6L}(L-z)^3] dz}{EI(z)} \\ &+ \frac{\left[-\frac{L^2}{6}(q_1 + 2q_2) + \bar{M}_2^* + \bar{V}_2^* L \right]}{k_1} + \frac{\bar{M}_2^*}{k_2}\end{aligned} \quad (51b)$$

b) Xác định chuyển vị và góc xoay tại nút 1 ($\bar{v}_1^*$; $\bar{\theta}_1^*$)

Phương trình cân bằng mô men đối với nút 2 và phương trình cân bằng lực cắt của phần tử thanh chịu uốn như trên Hình 5 là:

$$\bar{M}_1^* + \bar{M}_2^* - \bar{V}_1^* L + (2q_1 + q_2)L^2 / 6 = 0 \quad (52a)$$

$$\bar{V}_2^* + \bar{V}_1^* = 0,5(q_1 + q_2)L \quad (52b)$$

Mô men và lực cắt tại vị trí z của thanh được xác định:

$$\bar{M}^*(z) = \bar{V}_1^* z - \bar{M}_1^* - q_1 z^2 / 2 + (q_1 - q_2)z^3 / 6L \quad (53a)$$

$$\bar{V}^*(z) = \bar{V}_1^* - (q_1 + q_1 - (q_1 - q_2)z / L)z / 2 \quad (53b)$$

Thay (53a) và (53b) vào (38c) ta được:

$$\begin{aligned}\bar{C}^* &= \int_0^L \frac{\left(\bar{V}_1^* z - \bar{M}_1^* - \frac{q_1 z^2}{2} + \frac{(q_1 - q_2)z^3}{6L} \right)^2 dz}{2EI(z)} \\ &+ \int_0^L \frac{\gamma(z) \left[\bar{V}_1^* - q_1 z + (q_1 - q_2) \frac{z^2}{2L} \right]^2 dz}{2GA(z)} + \frac{\bar{M}_1^{*2}}{2k_1} + \frac{\left(-\bar{M}_1^* + \bar{V}_1^* L - \frac{(2q_1 + q_2)L^2}{6} \right)^2}{2k_2};\end{aligned} \quad (54)$$

Áp dụng định lý Castigliano, ta có:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1^* &= \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial \bar{V}_1^*} = \int_0^L \frac{\left(\bar{V}_1^* z - \bar{M}_1^* - \frac{q_1 z^2}{2} + \frac{(q_1 - q_2)z^3}{6L} \right) z dz}{EI(z)} \\ &+ \int_0^L \frac{\gamma(z) \left[\bar{V}_1^* - q_1 z + (q_1 - q_2) \frac{z^2}{2L} \right] dz}{GA(z)} + \frac{-\bar{M}_1^* + \bar{V}_1^* L - \frac{(2q_1 + q_2)L^2}{6}}{k_2} L;\end{aligned}$$

$$\bar{\theta}_1^* = \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial M_1} = \int_0^L \frac{(-\bar{V}_1^* z + \bar{M}_1^* + q_1 z^2/2 - (q_1 - q_2) z^3/6L) dz}{EI(z)} + \frac{\bar{M}_1^*}{k_1} \quad (55a.b)$$

$$+ \frac{(\bar{M}_1^* - \bar{V}_1^* L + (2q_1 + q_2) L^2/6)}{k_2};$$

Rút gọn biểu thức thay các tích phân cơ bản và dùng điều kiện biên: chuyển vị thẳng vuông góc với trục thanh tại nút 1 và nút 2 bằng 0 ($\bar{v}_1^* = 0, \bar{v}_2^* = 0$) ta được:

$$\bar{M}_1^* (-L/\alpha_2 - T_2) + \bar{V}_1^* (L^2/\alpha_2 + T_3 + \beta T_6) - (2q_1 + q_2) L^3/(6\alpha_2) - q_1 T_4/2 - q_1 \beta T_7 + (T_5 + 3\beta T_8)(q_1 - q_2)/(6L) = 0; \quad (56a)$$

$$\bar{M}_1^* (-L/\alpha_1 - L T_1 + T_2) + \bar{V}_1^* (L T_2 - T_3 - \beta T_6) - q_1 (L T_3 - T_4)/2 + (L T_4 - T_5 - 3\beta T_8)(q_1 - q_2)/(6L) + q_1 \beta T_7 = 0; \quad (56b)$$

Giải hệ phương trình từ (56a) và (56b) với các ẩn số là $\bar{M}_1^*$ và $\bar{V}_1^*$, áp dụng cho bài toán tải trọng phân bố đều ta được:

$$\bar{V}_1^* = \frac{\begin{Bmatrix} L^4(2q_1 + q_2)(1 + \alpha_1 T_1) \\ -\alpha_1 L^3(2q_1 + q_2) T_2 - 3\alpha_1^2 q_1 T_3 \\ +L \begin{bmatrix} -3\alpha_1 \alpha_2 q_1 T_2 T_3 + 4\alpha_1 q_1 T_4 + 3\alpha_2 q_1 T_4 \\ -\alpha_1 q_2 T_4 + 3\alpha_1 \alpha_2 q_1 T_1 T_4 \\ +6\beta q_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T_1) T_7 \end{bmatrix} + (q_1 - q_2) \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 T_2 T_4 - \alpha_1 T_5 - \alpha_2 T_5 \\ -\alpha_1 \alpha_2 T_1 T_5 \\ -3\beta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T_1) T_8 \end{bmatrix} \end{Bmatrix}}{\begin{bmatrix} L^2(1 + \alpha_1 T_1) - 2\alpha_1 L T_2 - \alpha_1 \alpha_2 T_2^2 \\ 6L + \alpha_1 T_3 + \alpha_2 T_3 + \alpha_1 \alpha_2 T_1 T_3 \\ +\beta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T_1) T_6 \end{bmatrix}} \quad (57a)$$

$$\bar{M}_1^* = \frac{\begin{Bmatrix} L^4(2q_1 + q_2) T_2 - L^3 \begin{bmatrix} (5q_1 + q_2) T_3 \\ +\beta(2q_1 + q_2) T_6 \end{bmatrix} \\ +L^2(4q_1 T_4 - q_2 T_4 + 6\beta q_1 T_7) \\ +L \begin{bmatrix} -3\alpha_2 q_1 \begin{bmatrix} T_3^2 + \beta T_3 T_6 \\ -T_2(T_4 + 2\beta T_7) \end{bmatrix} \\ -(q_1 - q_2) \begin{bmatrix} T_3 T_4 + \beta T_4 T_6 \\ -T_2(T_5 + 3\beta T_8) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{Bmatrix}}{\begin{bmatrix} L^2(1 + \alpha_1 T_1) - 2\alpha_1 L T_2 - \alpha_1 \alpha_2 T_2^2 \\ 6L + \alpha_1 T_3 + \alpha_2 T_3 + \alpha_1 \alpha_2 T_1 T_3 \\ +\beta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T_1) T_6 \end{bmatrix}} \quad (57b)$$

Thay (57a) và (57b) vào phương trình cân bằng ta được $\bar{M}_2^*$ và $\bar{V}_2^*$:

$$\bar{V}_2^* = \frac{\begin{Bmatrix} L^4(q_1 + 2q_2)(1 + \alpha_1 T_1) - \alpha_1 L^3(4q_1 + 5q_2) T_2 \\ \alpha_2(q_1 + q_2)(T_3 + \beta T_6) \\ +3L^2 \begin{bmatrix} (2q_1 + q_2) T_3 + \beta(q_1 + q_2) T_6 \\ -\alpha_2(q_1 + q_2) \begin{bmatrix} T_2^2 \\ -T_1(T_3 + \beta T_6) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ +L \begin{bmatrix} 3\alpha_1 \alpha_2 q_1 T_2 T_3 - 4\alpha_1 q_1 T_4 - 3\alpha_2 q_1 T_4 \\ +\alpha_1 q_2 T_4 - 3\alpha_1 \alpha_2 q_1 T_1 T_4 \\ -6\beta q_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T_1) T_7 \end{bmatrix} + (q_1 - q_2) \begin{bmatrix} -\alpha_1 \alpha_2 T_2 T_4 + \alpha_1 T_5 \\ +\alpha_2 T_5 + \alpha_1 \alpha_2 T_1 T_5 \\ +3\beta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T_1) T_8 \end{bmatrix} \end{Bmatrix}}{\begin{bmatrix} L^2(1 + \alpha_1 T_1) - 2\alpha_1 L T_2 - \alpha_1 \alpha_2 T_2^2 \\ 6L + \alpha_1 T_3 + \alpha_2 T_3 + \alpha_1 \alpha_2 T_1 T_3 \\ +\beta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T_1) T_6 \end{bmatrix}} \quad (58b)$$

$$\bar{M}_2^* = \frac{\begin{Bmatrix} -L^3(2q_1 + q_2) \begin{bmatrix} T_2^2 - T_1(T_3 + \beta T_6) \\ +3L^2 q_1 \begin{bmatrix} T_2 T_3 - T_1(T_4 + 2\beta T_7) \\ -T_2(T_5 + 3\beta T_8) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ + (q_1 - q_2) \begin{bmatrix} T_3 T_4 + \beta T_4 T_6 \\ -T_2(T_5 + 3\beta T_8) \end{bmatrix} \\ +L \begin{bmatrix} q_2 \begin{bmatrix} T_2 T_4 - T_1(T_5 + 3\beta T_8) \\ -3T_3^2 - 3\beta T_3 T_6 \end{bmatrix} \\ +q_1 \begin{bmatrix} +2T_2(T_4 + 3\beta T_7) \\ +T_1(T_5 + 3\beta T_8) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{Bmatrix}}{\begin{bmatrix} L^2(1 + \alpha_1 T_1) - 2\alpha_1 L T_2 - \alpha_1 \alpha_2 T_2^2 \\ 6L + \alpha_1 T_3 + \alpha_2 T_3 + \alpha_1 \alpha_2 T_1 T_3 \\ +\beta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T_1) T_6 \end{bmatrix}} \quad (58b)$$

Như vậy, ta thu được véc tơ tải trọng nút cho phần tử thanh vát, tiết diện chữ I, hai đầu liên kết nửa cứng chịu tải trọng phân bố hình thang như sau:

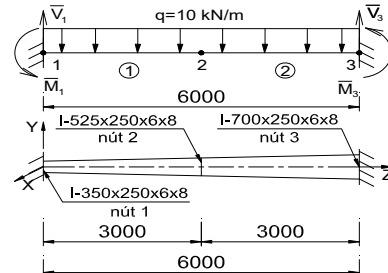
$$\{\bar{F}^*\} = \{\bar{V}_1^* \quad \bar{M}_1^* \quad \bar{V}_2^* \quad \bar{M}_2^*\}^T \quad (59)$$

5. LẬP TRÌNH TÍNH TOÁN VÀ VÍ DỤ SỐ

5.1. Cơ sở lập trình

Trên sơ sở ma trận độ cứng và véc tơ tải đã xây dựng, tác giả thiết lập chương trình tính dựa trên phần mềm chuyên dụng MathLab 2014 có tên SAC (Static Analysis with Rigid connections) để phân tích kết cấu thanh phẳng có tiết diện chữ I với chiều cao thay đổi theo chiều dài.

5.2. Ví dụ 1: Xác định nội lực - chuyển vị của dầm thép tiết diện vát chịu tải trọng phân bố đều, hai đầu liên kết cứng



Hình 6 - Dầm I-(350÷700)×250×6×8 chịu tải phân bố đều q = 10kN/m

Biết: Dầm tiết diện chữ I: I - (350÷700)×250×6×8 chiều dài L = 6 m, q = 10 kN/m, mô đun đàn hồi E = 21×10⁴ MPa. Yêu cầu: Xác định mô men uốn M và lực cắt V ở các nút 1,2,3 và so sánh kết quả tính của chương trình SAC và phần mềm SAP 2000 (SAP), đối với trường hợp có xét đến và không xét đến ảnh hưởng của lực cắt.

5.2.1. Kết quả phân tích theo SAC và SAP và chênh lệch theo 2 phần mềm được ghi ở (Bảng 7, 8 - phần tử dầm có xét đến ảnh hưởng lực cắt, liên kết cứng); (Bảng 9, 10 - phần tử dầm không xét đến ảnh hưởng lực cắt, liên kết cứng)

Bảng 7. Kết quả nội lực dầm

P. tử	Nội lực	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
			SAC	SAP	
1	$\bar{M}$ (kNm)	1	-21,37	-21,41	0,17
		2	14,29	14,28	0,07
	$\bar{V}$ (kN)	1	-26,89	-26,90	0,04
		2	3,11	3,10	0,32
2	$\bar{M}$ (kNm)	2	14,29	14,28	0,07
		3	-40,05	-40,03	0,05
	$\bar{V}$ (kN)	2	3,11	3,10	0,32
		3	33,11	33,10	0,03

Bảng 8. Kết quả chuyển vị đứng dầm

P. tử	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
		SAC	SAP	
1	2	-0,721	-0,717	0,35
2	2	-0,721	-0,717	0,35

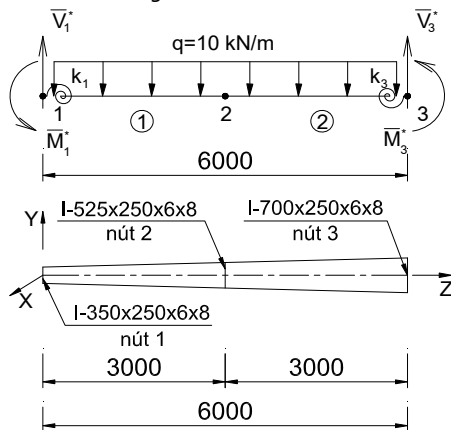
Bảng 9. Kết quả nội lực dầm

P. tử	Nội lực	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
			SAC	SAP	
1	$\bar{M}$ (kNm)	1	-21,47	-21,48	0,05
		2	14,32	14,31	0,07
	$\bar{V}$ (kN)	1	-26,93	-26,93	0,00
		2	3,07	3,07	0,00
2	$\bar{M}$ (kNm)	2	14,32	14,31	0,07
		3	-39,89	-39,91	0,03
	$\bar{V}$ (kN)	2	3,07	3,07	0,00
		3	33,07	33,07	0,00

Bảng 10. Kết quả chuyển vị đứng dầm

P. tử	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
		SAC	SAP	
1	2	-0,526	-0,524	0,38
2	2	-0,526	-0,524	0,38

5.3. Kết quả phân tích theo SAC và SAP và chênh lệch theo 2 phần mềm được ghi ở (Bảng 11, 12 - phần tử dầm có xét đến ảnh hưởng lực cắt, có liên kết cứng); (Bảng 13, 14 - phần tử dầm không xét đến ảnh hưởng lực cắt, có liên kết cứng)



Hình 7 - Dầm I-(350÷700)×250×6×8 chịu tải phân bố đều $q = 10 \text{ kN/m}$

Bảng 11. Kết quả nội lực dầm

P. tử	Nội lực	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
			SAC	SAP	
1	$\bar{M}^*$ (kNm)	1	-21,46	-21,50	0,19
		2	17,83	17,81	0,11
	$\bar{V}^*$ (kN)	1	-28,10	-28,11	0,03
		2	1,90	1,89	0,52
2	$\bar{M}^*$ (kNm)	2	17,83	17,81	0,11
		3	-32,87	-32,87	0,00
	$\bar{V}^*$ (kN)	2	1,90	1,89	0,52
		3	31,90	31,89	0,03

Bảng 12. Kết quả chuyển vị đứng dầm (mm)

P. tử	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
		SAC	SAP	
1	2	-0,946	-0,942	0,00
2	2	-0,946	-0,942	0,00

Bảng 13. Kết quả nội lực dầm

P. tử	Nội lực	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
			SAC	SAP	
1	$\bar{M}^*$ (kNm)	1	-21,73	-21,75	0,09
		2	17,92	17,89	0,17
	$\bar{V}^*$ (kN)	1	-28,21	-28,21	0,00
		2	1,79	1,79	0,00
2	$\bar{M}^*$ (kNm)	2	17,92	17,89	0,17
		3	-32,44	-32,48	0,12
	$\bar{V}^*$ (kN)	2	1,79	1,79	0,00
		3	31,79	31,79	0,00

Bảng 14. Kết quả chuyển vị dầm (mm)

P. tử	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
		SAC	SAP	
1	2	-0,750	-0,752	0,31
2	2	-0,750	-0,752	0,31

5.4. So sánh kết quả tính toán trường hợp phân tử dầm có (PA1) và không (PA2) xét đến độ cứng liên kết

a. Kết quả nội lực dầm có kể đến ảnh hưởng lực cắt

P. tử	Nội lực	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
			PA1	PA2	
1	$\bar{M}^*$ (kNm)	1	-21,46	-21,37	0,42
		2	17,83	14,29	24,77
	$\bar{V}^*$ (kN)	1	-28,10	-26,89	4,5
		2	1,90	3,11	38,9
2	$\bar{M}^*$ (kNm)	2	17,83	14,29	24,77
		3	-32,87	-40,05	17,93
	$\bar{V}^*$ (kN)	2	1,90	3,11	38,9
		3	31,90	33,11	3,65

b. Kết quả nội lực dầm không kể đến ảnh hưởng lực cắt

P. Tử	Nội lực	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
			PA1	PA2	
1	$\bar{M}^*$ (kNm)	1	-21,73	-21,47	1,21
		2	17,92	14,32	25,14
	$\bar{V}^*$ (kN)	1	-28,21	-26,93	4,75
		2	1,79	3,07	41,69
2	$\bar{M}^*$ (kNm)	2	17,92	14,32	25,14
		3	-32,44	-39,89	18,68
	$\bar{V}^*$ (kN)	2	1,79	3,07	41,69
		3	31,79	33,07	3,87

c. Kết quả chuyển vị đứng dầm không kể đến ảnh hưởng lực cắt (mm)

P. tử	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
		PA1	PA2	
1	2	-0,750	-0,526	42,5
2	2	-0,750	-0,526	42,5

d. Kết quả chuyển vị đứng dầm kể đến ảnh hưởng lực cắt (mm)

P. tử	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
		PA1	PA2	
1	2	-0,946	-0,721	31,2
2	2	-0,946	-0,721	31,2

5.5. So sánh kết quả tính toán trường hợp phần tử dầm có và không xét đến ảnh hưởng của lực cắt

a. Kết quả nội lực dầm khi không xét đến liên kết nửa cứng.

P. tử	Nội lực	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
			PA1	PA2	
1	$\bar{M}^*$ (kNm)	1	-21,37	-21,47	0,46
		2	14,29	14,32	0,2
	$\bar{V}^*$ (kN)	1	-26,89	-26,93	0,14
		2	3,11	3,07	1,0
2	$\bar{M}^*$ (kNm)	2	14,29	14,32	0,2
		3	-40,05	-39,89	0,4
	$\bar{V}^*$ (kN)	2	3,11	3,07	1,0
		3	33,11	33,07	0,12

b. Kết quả chuyển vị đứng dầm khi không xét đến liên kết nửa cứng (mm)

P. tử	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
		PA1	PA2	
1	2	-0,721	-0,526	37,07
2	2	-0,721	-0,526	37,07

c. Kết quả nội lực dầm khi xét đến liên kết nửa cứng.

P. Tử	Nội lực	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
			PA1	PA2	
1	$\bar{M}^*$ (kNm)	1	-21,46	-21,73	1,24
		2	17,83	17,92	0,5
	$\bar{V}^*$ (kN)	1	-28,10	-28,21	0,4
		2	1,90	1,79	6,14
2	$\bar{M}^*$ (kNm)	2	17,83	17,92	0,5
		3	-32,87	-32,44	1,33
	$\bar{V}^*$ (kN)	2	1,90	1,79	6,14
		3	31,90	31,79	0,34

d. Kết quả chuyển vị đứng dầm khi xét đến liên kết nửa cứng (mm)

P. tử	Nút	Kết quả tính		Chênh lệch (%)
		PA1	PA2	
1	2	-0,946	-0,750	26,1
2	2	-0,946	-0,750	26,1

5.6. Nhận xét kết quả tính toán

Qua kết quả phân tích, có nhận xét như sau:

- Khi chia thanh làm 2 phần tử, kết quả tính về nội lực và chuyển vị ở nút theo chương trình tính SAC và SAP2000 chênh lệch giá trị lớn nhất là 0,52% và nhỏ nhất là 0,1%. Qua đó, cho thấy ma trận độ cứng và véc tơ tải đã được thiết lập là chính xác, đồng thời chương trình tính toán SAC có thể tin cậy được.

- Khi xét ảnh hưởng của lực cắt, ta có thể kết quả về nội lực chênh lệch không nhiều, tuy nhiên kết quả về chuyển vị lớn nhất tại nút 2 có độ chênh lệch 43,5%.

- Khi xét đến độ cứng của liên kết với độ cứng giả định ở hai đầu liên kết là $2 \times 10^5 \text{ kNm/rad}$, ta có thể kết quả về nội lực chênh lệch lớn nhất tại nút 2 là 41,69%; về kết quả chuyển vị, chênh lệch lớn nhất tại nút 2 là 42,5%.

6. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Qua nội dung đề cập ở trên, tác giả rút ra một số kết luận và kiến nghị như sau:

- Sử dụng mô hình toán học là hàm số mũ tổng quát thể hiện các đặc trưng tiết diện phần tử thanh vát cho kết quả đạt độ chính xác cho phép, và sử dụng trong tính toán các đặc trưng hình học cho tiết diện đó.

- Kết quả các ma trận độ cứng và véc tơ tải thiết lập đạt độ tin cậy, dùng cho bảo toán phân tích kết cấu. Các ma trận và véc tơ tải cho kết quả chính xác hơn so với kết quả của phần mềm SAP 2000 mà không phải chia thanh ra nhiều phần tử.

- Với cách tiếp cận phần tử thanh tiết diện vát như trên, chúng ta có thể dễ dàng phân tích và giải các bài toán đối với thanh tiết diện vát như các bài toán về dao động, ổn định....

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Tiến Cường (chủ biên), Hồ Dự, Phạm Khắc Hiên (1991). Các chương trình máy tính thường dùng trong thiết kế xây dựng. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ Thuật.
2. Vũ Như Cầu (1992). Dạng ma trận của các phương pháp kết cấu. Nhà Xuất bản Nông Nghiệp.
3. William McGuire, Richard H. Gallagher, Ronald D. Ziemian (2000). Matrix Structural Analysis. Jonh Wiley & Sons, Inc.
4. Young W. Kwon, Hyochoong Bang (200). The Finite Element Method Using MathLab Second Edition.