

Mô phỏng số FFT và một số phương pháp xấp xỉ xác định mô đun đàn hồi thể tích của vật liệu composite hai pha dạng nền - cốt liệu

FFT numerical simulation and some approximation methods used to determine the elastic bulk modulus of composite two-phase matrix-inclusion materials

Nguyễn Văn Luật

Khoa Cơ khí, Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội

Email: nguyenvanluat@hau.edu.vn

ĐT: 0974368028

Tóm tắt

Từ khóa:

Đồng nhất hóa vật liệu; Mô đun đàn hồi thể tích; Phương pháp biến đổi Fourier(FFT); Vật liệu composite.

Bài báo trình bày phương pháp biến đổi nhanh Fourier (FFT) và một số phương pháp xấp xỉ để tính mô đun đàn hồi thể tích vĩ mô cho vật liệu hai pha dạng nền-cốt liệu tròn trong không gian hai chiều. Sử dụng phương pháp FFT xác định mô đun đàn hồi thể tích vĩ mô đối với một số mô hình vật liệu đẳng hướng, trong đó pha cốt liệu sắp xếp tuần hoàn trong không gian hai chiều có các dạng hình học Square, Hexagonal, Random. Kết quả tính FFT với tỉ lệ thể tích giữa các pha thay đổi được so sánh với các phương pháp xấp xỉ khác.

Abstract

Keywords:

Composite materials; Elastic bulk modulus; Fast fourier transformation method (FFT); Homogenization.

This article introduces Fast fourier transformation method (FFT) and some approximation methods to calculate the elastic bulk modulus of matrix-inclusion circle model in two-dimensional space. The application of FFT method in calculating the macroscopic elastic bulk modulus of isotropic composite materials, in which inclusion have periodic structure with square, hexagonal and random type in two-dimensional space. Numerical results of FFT with volume-changed proportions are compared with other approximation methods.

Ngày nhận bài: 06/07/2018

Ngày nhận bài sửa: 05/9/2018

Ngày chấp nhận đăng: 15/9/2018

1. GIỚI THIỆU

Các loại vật liệu tổ hợp (vật liệu không đồng nhất) ngày nay được áp dụng trong hầu hết các lĩnh vực khoa học, kỹ thuật và đời sống. Việc nghiên cứu tính chất vĩ mô (tính chất hiệu quả) hay đồng nhất hóa vật liệu được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu và đã đưa ra nhiều kết quả xấp xỉ cho các mô hình vật liệu khác nhau. Đối với các mô hình vật liệu trong tính toán để đơn giản có thể được mô hình hóa hình học dưới dạng cốt liệu hình cầu hoặc trong không gian hai chiều là hình tròn. Tính chất vĩ mô của vật liệu tổ hợp phụ thuộc vào nhiều yếu tố phức tạp như cấu trúc hình học pha, các tính chất của vật liệu thành phần, tỷ lệ thể tích giữa các pha.

Do đó trong các nghiên cứu chủ yếu chỉ tìm được cận trên, dưới và các công thức xấp xỉ áp dụng cho một số mô hình vật liệu. Hướng tiếp cận tính xấp xỉ cho các mô hình vật liệu nhiều thành phần như của (Maxwel, 1892), (Voight, 1928), (Reuss, 1929), (Chen, 1978), (Mori and Tanaka, 1973)... Một hướng tiếp cận khác là xây dựng biên trên và biên dưới cho hệ số đàn hồi vĩ mô như (Hill, 1952), (Hashin and Strikman, 1963), (Pham D.C, 1994)... Ngoài ra các phương pháp số hiện nay cũng là cách tiếp cận hiệu quả trong việc xác định tính chất vĩ mô của vật liệu như phương pháp phần tử hữu hạn (FEM), phương pháp biến đổi nhanh Fourier (FFT). Phương pháp FFT áp dụng trong lĩnh vực cơ học vật liệu tính mô đun đàn hồi cho vật liệu tổ hợp được đề xuất đầu tiên bởi (Moulinec and Subquet, 1994). Trong bài báo này sử dụng phương pháp FFT để tính mô đun đàn hồi thể tích cho một số mô hình vật liệu hai pha đẳng hướng ngang với các pha cốt liệu hình tròn cùng kích thước được sắp xếp tuần hoàn trong pha nền, trong đó có so sánh với các phương pháp xấp xỉ khác và đánh giá của Hashin-Strikman (HS).

2. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI FOURIER (FFT)

Nội dung cơ bản của phương pháp biến đổi Fourier là thiết lập được phương trình Lippman-Schwinger đối với bài toán không đồng nhất và sử dụng toán tử Green tuần hoàn. Từ đó đưa ra được thuật toán lặp để xác định mô đun đàn hồi thể tích vĩ mô của vật liệu. Ứng xử của các vật liệu thành phần được mô tả bởi định luật Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

trong đó $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ và $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ lần lượt là các Tensor biến dạng và ứng suất thỏa mãn phương trình cân bằng:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2)$$

Trường biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ và chuyển vị $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ có thể tách thành các thành phần sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}^{per}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{per} \quad (3)$$

trong đó \mathbf{E}^0 là biến dạng vĩ mô đồng nhất đối với phần tử đặc trưng, $\boldsymbol{\varepsilon}^{per}$ gọi là thành phần nhiễu có tính chất tuần hoàn. Do tính chất tuần hoàn nên ta có:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{per}(\mathbf{x}) \rangle_V = 0; \quad \mathbf{E}^0 = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle_V \quad (4)$$

với ký hiệu $\langle \cdot \rangle_V$ là trung bình trên thể tích của phần tử đặc trưng V , $\langle \cdot \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \cdot d\mathbf{x}$.

Bài toán trên phần tử đặc trưng có thể quy về tìm các thành phần $\mathbf{u}^{per}, \boldsymbol{\varepsilon}^{per}$. Đưa vào môi trường làm chuẩn có hệ số đàn hồi \mathbf{C}_0 , phương trình cân bằng trở thành

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot [(\mathbf{C}^0 + \delta\mathbf{C}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})] = 0 \quad (5)$$

với $\delta\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{C}^0$

Thay $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ từ (3) vào (5) viết lại dưới dạng tương đương sau:

$$\nabla \cdot [\mathbf{C}^0 : \nabla \otimes \mathbf{u}^{per}] + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = 0 \quad (6)$$

trong đó tenxơ $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ gọi là tenxơ "cực" được xác định bởi: $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \delta\mathbf{C}(\mathbf{x}) : [\mathbf{E}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}^{per}(\mathbf{x})]$

Do tính chất chu kỳ của phần tử đặc trưng nên \mathbf{u}^{per} , $\boldsymbol{\varepsilon}^{per}$ và $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ được biểu diễn dưới dạng chuỗi Fourier:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}, \quad \hat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{F}(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (7)$$

trong đó \mathbf{F} chỉ \mathbf{u}^{per} , $\boldsymbol{\varepsilon}^{per}$ và $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, còn $\hat{\mathbf{F}}$ là biến đổi Fourier của các đại lượng này, đó là $\hat{\mathbf{u}}^{per}$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{per}$ và $\hat{\boldsymbol{\tau}}$; $\boldsymbol{\xi} = \xi_k \mathbf{e}_k$, $\xi_j = \frac{n_j \pi}{a_j}$ ($n_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (8), $2a_j$ là kích thước của phần tử đặc trưng

Thay các biểu diễn dạng chuỗi Fourier của \mathbf{u}^{per} , $\boldsymbol{\varepsilon}^{per}$ và $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ ở (7) vào phương trình (6) thu được

$$-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{C} : \{\boldsymbol{\xi} \otimes \hat{\mathbf{u}}^{per}(\boldsymbol{\xi})\} + i\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad (9)$$

từ đó các trường $\hat{\mathbf{u}}^{per}$ và $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{per}$ có thể xác định như sau:

$$\hat{\mathbf{u}}^{per}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{i\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi})}{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{C}^0 \cdot \boldsymbol{\xi}}, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{per}(\boldsymbol{\xi}) = i\boldsymbol{\xi} \otimes \hat{\mathbf{u}}^{per}(\boldsymbol{\xi}) = -\boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi})}{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{C}^0 \cdot \boldsymbol{\xi}} = -\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^0(\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}) \quad (10)$$

trong đó $\boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{\xi})$ là toán tử Green biến dạng tensor bậc bốn phụ thuộc môi trường đồng nhất C_0 (xem Bonnet, 2007-[1]) được xác định bởi

$$\boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}}{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{C}^0 \cdot \boldsymbol{\xi}} \quad (11)$$

Từ đó thu được phương trình Lippman-Schwinger

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{E}^0(\boldsymbol{\xi}) - \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^0(\boldsymbol{\xi}) : \hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{E}^0(\boldsymbol{\xi}) - \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^0(\boldsymbol{\xi}) : [(\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{C}^0) * \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi})] \quad (12)$$

Nghiệm của phương trình được tìm bởi sơ đồ lặp sau:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) = -\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^0(\boldsymbol{\xi}) : [(\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{C}^0) * \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^i(\boldsymbol{\xi})], & \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{E}^0, & \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (13)$$

Chú ý rằng $\boldsymbol{\Gamma}^0 \cdot \mathbf{C}^0 * \mathbf{E}^i(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{E}^i(\boldsymbol{\xi})$ với $\forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ xem (Michel, 1999-[5]), phương trình (13) được viết lại dưới dạng sau:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^i(\boldsymbol{\xi}) - \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^0(\boldsymbol{\xi}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i(\boldsymbol{\xi}), & \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1} = \mathbf{E}^0, & \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (14)$$

trong đó $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^i(\boldsymbol{\xi})$ là biến đổi Fourier của $\boldsymbol{\sigma}^i(x)$. Liên hệ giữa trường ứng suất $\boldsymbol{\sigma}$ và trường biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}$ trong không gian Fourier được biểu diễn bằng biểu thức:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) * \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}) \quad (15)$$

trong đó ký hiệu "*" là tích "convolution". Biến đổi Fourier của tensor đàn hồi bậc bốn:

$$\mathbf{C}(\xi) = \int_V \mathbf{C}(\mathbf{x}) e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \sum_{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} I_{\alpha}(\xi) \quad (16)$$

với $\mathbf{C}_{\alpha}, I_{\alpha}$ lần lượt là tensor mô đun đàn hồi, hàm dạng của pha α , $I_{\alpha}(\xi)$ được xác định theo (Nemat-Nasser, 1999-[6]):

$$I_{\alpha}(\xi) = \frac{1}{V_{\alpha}} \int_{V_{\alpha}} e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} dV \quad (17)$$

Thay các biểu thức (15), (16) vào (14) thu được

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}(\xi) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^i(\xi) - \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^0(\xi) \cdot \sum_{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} I_{\alpha}(\xi) * \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^i(\xi), & \xi \neq 0 \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1} = \mathbf{E}^0, & \xi = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Để xác định hệ số đàn hồi vĩ mô của vật liệu, phần tử đặc trưng có biến dạng vĩ mô \mathbf{E}^0 cho trước. Khi quá trình lặp theo (18) hội tụ, ta có

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi = 0) = \mathbf{C}^{eff} * \mathbf{E}^0 \quad (19)$$

trong đó \mathbf{C}^{eff} là mô đun đàn hồi vĩ mô của vật liệu. Từ đó rút ra thuật toán số để xác định mô đun đàn hồi của vật liệu nhiều thành:

$$\text{Bước } i=1: \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1(\xi) = 0 \quad \forall \xi \neq 0; \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1(0) = \mathbf{E}^0$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^1(\xi) = \mathbf{C}(\xi) * \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1(\xi)$$

$$\text{Bước } i: \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^i(\xi) \text{ và } \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i(\xi) \text{ đã biết}$$

Kiểm tra hội tụ

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}(\xi) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^i(\xi) - \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^0(\xi) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i(\xi)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{i+1}(\xi) = \mathbf{C}(\xi) * \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}(\xi)$$

Kiểm tra điều kiện hội tụ được xác định bằng biểu thức sau:

$$\frac{\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{i+1}(\xi) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i(\xi)\|}{\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^i(\xi)\|} < \epsilon, \text{ với } \epsilon \text{ là sai số cho trước } (\epsilon = 10^{-3})$$

3. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ

Trong mục này giới thiệu một số phương pháp tính xấp xỉ và đánh giá cho mô đun đàn hồi thể tích vĩ mô (K^{eff}) của vật liệu nền-cốt liệu tròn đẳng hướng trong không gian hai chiều với các ký hiệu: K_I, μ_I, ν_I là mô đun đàn hồi, mô đun trượt và tỉ lệ thể tích của pha cốt liệu. K_M, μ_M, ν_M là mô đun đàn hồi, mô đun trượt và tỉ lệ thể tích của pha nền.

3.1. Xấp xỉ Maxwell (1892-[9])

$$K^{eff} = \left(\frac{\nu_I}{K_I + \mu_M} + \frac{\nu_M}{K_M + \mu_M} \right)^{-1} - \mu_M \quad (20)$$

3.2. Xấp xỉ Mori-Tanaka (1973-[4])

Xấp xỉ Mori-Tanaka khá nổi tiếng và được áp dụng phổ biến trong kỹ thuật và kim loại học. Trong không gian hai chiều, xấp xỉ Mori-Tanaka có dạng:

$$K^{eff} = K_M + v_I(K_I - K_M) \cdot \beta \quad (21)$$

trong đó $\beta = \frac{\theta}{\theta + (1 - v_I)(K_I - K_M)}$, $\theta = K_M + \frac{4}{3}\mu_M$

3.3. Xấp xỉ Dilute suspension (DS)

Xuất phát từ kết quả tính hệ số đàn hồi vĩ mô của Eshelby (1957-[2]) cho cốt liệu có dạng ellipsoid trong vùng tỉ lệ thể tích v_I nhỏ (các hạt cốt liệu cách xa nhau), trong trường hợp cốt liệu tròn phân bố thưa ($v_I \ll 1$), có thể tìm được xấp xỉ DS được biểu diễn dưới dạng [9]:

$$K^{eff} = K_M + v_I(K_I - K_M) \cdot \frac{K_M + \mu_M}{K_I + \mu_M} \quad (22)$$

3.4. Đánh giá Hashin-Strikman (HS bound) (1962-[3])

Hashin-Strikman (HS) dựa trên nguyên lý biến phân riêng đưa vào trường khả dĩ phân cực đã xây dựng được đánh giá trên (HSU) và dưới (HSL) cho hệ số đàn hồi thể tích vĩ mô của vật liệu nhiều pha (tỉ lệ thể tích mỗi pha là v_α) đẳng hướng trong không gian d chiều:

$$P_K\left(\frac{2(d-1)}{d}\mu_{min}\right) \leq K^{eff} \leq P_K\left(\frac{2(d-1)}{d}\mu_{max}\right), \quad (23)$$

trong đó $P_K(K_*) = \left(\sum_{\alpha} \frac{v_{\alpha}}{K_{\alpha} + K_*}\right)^{-1} - K_*$, $\mu_{min} = \min\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$, $\mu_{max} = \max\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$

4. KẾT QUẢ ÁP DỤNG VÀ SO SÁNH

Trong mục này sẽ đưa ra kết quả tính toán FFT mô đun đàn hồi thể tích vĩ mô cho một số mô hình vật liệu đẳng hướng có cốt liệu dạng tròn trong không gian hai chiều và so sánh với các phương pháp xấp xỉ trình bày ở trên. Hàm dạng (17) cho cốt liệu tròn trong không gian hai chiều có thể tính được chính xác [7]:

$$I_{\alpha}(\xi) = \frac{\pi R}{2S\|\xi\|} J_1(R\|\xi\|) \sum_k e^{i\xi x_k} \quad (24)$$

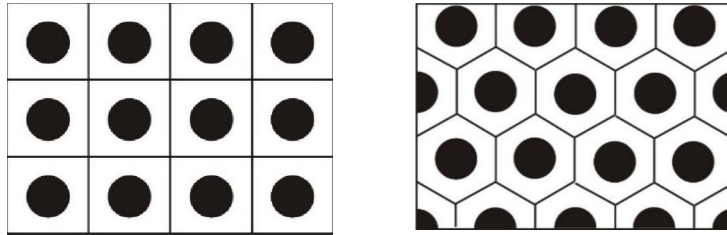
Trong đó J_1 là hàm Bessel loại 1, R là bán kính pha cốt liệu, S là diện tích phần tử đặc trưng, x_k là tọa độ trọng tâm của pha cốt liệu α

Để minh họa cho các phương pháp trình bày ở trên, xét hai loại vật liệu hai pha cốt liệu tròn (I) phân bố trong pha nền (M) có các thông số như sau:

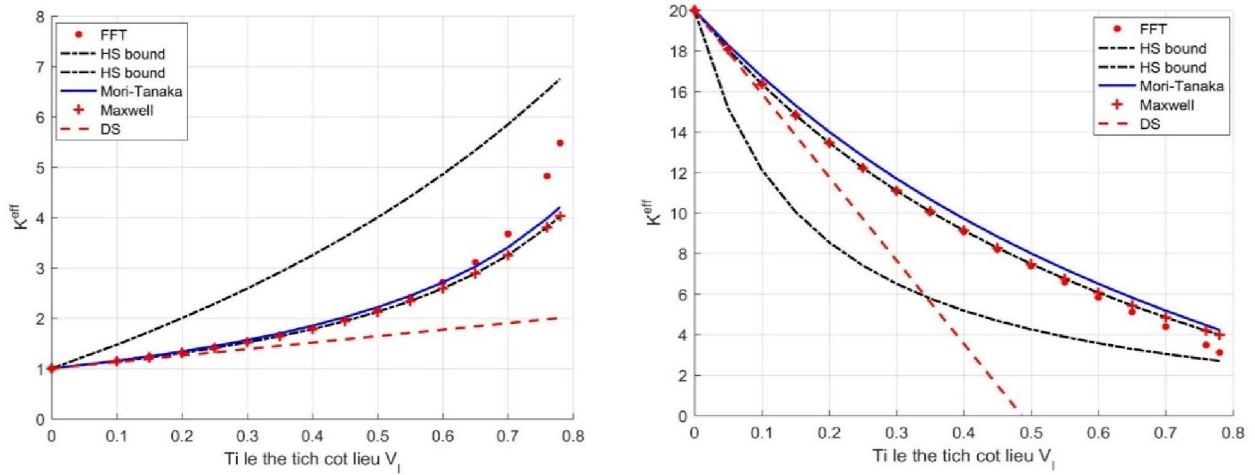
Vật liệu A: $K_M = 1$, $K_I = 10$, $\mu_M = 0.5$, $\mu_I = 8$

Vật liệu B: $K_M = 20$, $K_I = 2$, $\mu_M = 12$, $\mu_I = 1$

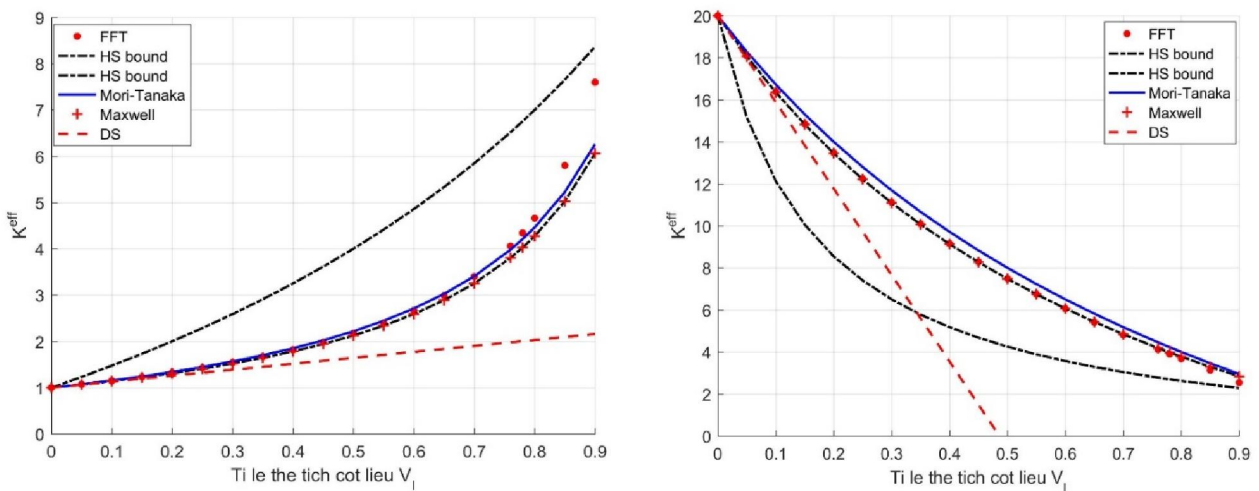
Đầu tiên xem xét hai mô hình vật liệu (hình 1) có pha cốt liệu phân bố tuần hoàn dạng hình vuông (Square) và lục giác (Hexagonal). Do cốt liệu không chồng lấn nên tỉ lệ thể tích cốt liệu chỉ có thể tăng đến một giới hạn nhất định. Kết quả tính toán FFT và so sánh với các mô hình xấp xỉ khác được thể hiện trên hình 2 và 3. Từ hình vẽ cho thấy các phương pháp xấp xỉ ở trên chỉ áp dụng tốt với một số mô hình khi tỉ lệ thể tích pha cốt liệu nhỏ (0.1-0.3). Kết quả FFT luôn nằm trong biên trên và biên dưới của HS, trong khi đó các xấp xỉ khác có thể nằm ngoài đánh giá của HS.



Hình 1. Mô hình cốt liệu có cấu trúc tuần hoàn sắp xếp dạng: Square (bên trái), Hexagonal (bên phải)

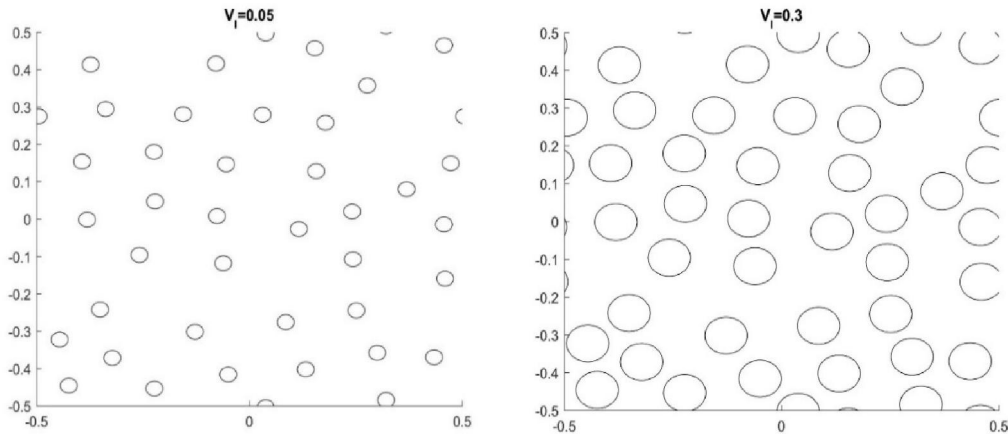


Hình 2. Kết quả FFT và một số phương pháp xấp xỉ cho mô hình Square: vật liệu A (bên trái), vật liệu B (bên phải)

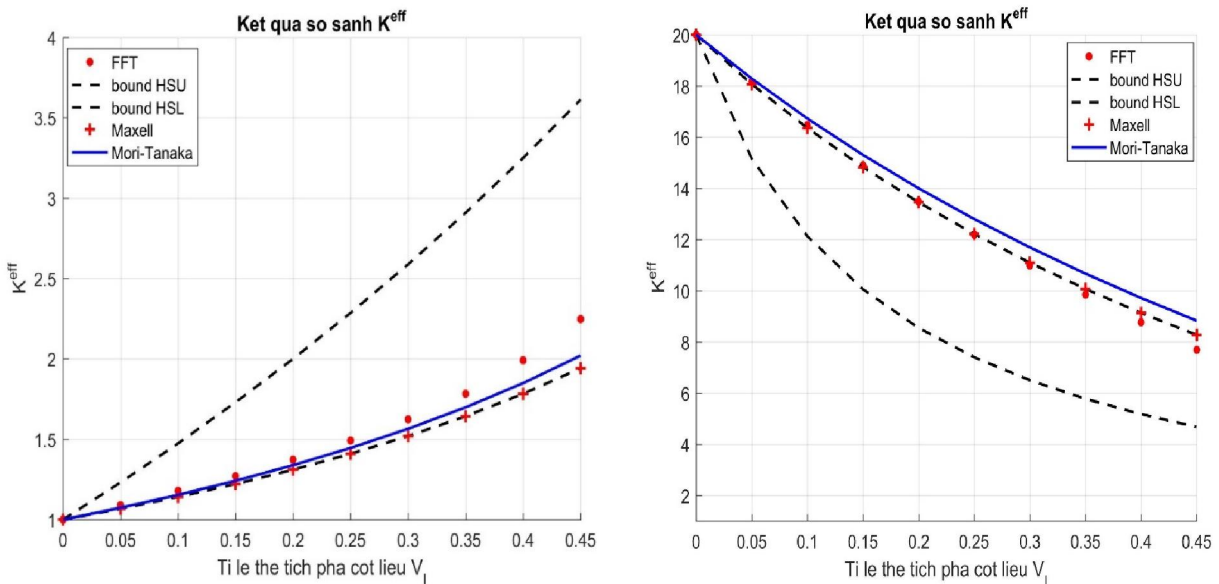


Hình 3. Kết quả FFT và một số phương pháp xấp xỉ cho mô hình Hexagonal: vật liệu A (bên trái), vật liệu B (bên phải)

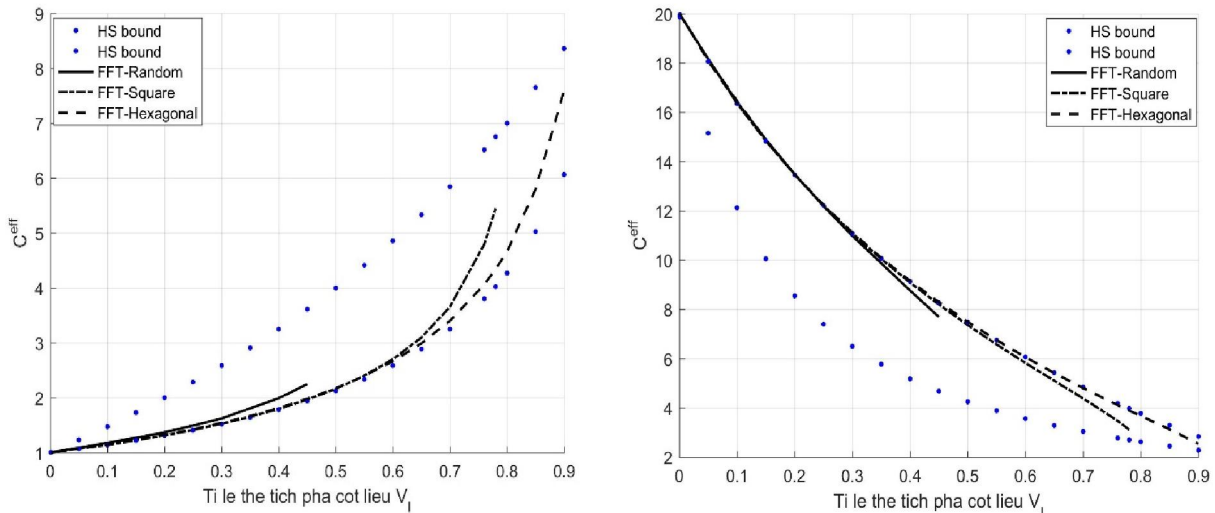
Mô hình tiếp theo cho vật liệu composite có pha cốt liệu phân bố dạng ngẫu nhiên trong pha nền (hình 4). Kết quả FFT và so sánh thể hiện trên hình 5. Đây là trường hợp cốt liệu phân bố dày trong pha nền nên không sử dụng xấp xỉ DS, xấp xỉ Maxwell luôn trùng với một trong hai biên của đánh giá HS tùy thuộc vào thông số của pha nền và pha cốt liệu. Kết quả FFT cho mô hình này cũng nằm trong đánh giá của HS trong khi đó xấp xỉ Mori-Tanaka đã vi phạm đánh giá của HS. Như vậy có thể thấy được tính chính xác và hiệu quả của phương pháp FFT so với các phương pháp xấp xỉ được trình bày ở phần trên.



Hình 4. Mô hình vật liệu với pha cốt liệu phân bố hỗn độn (Random) trong pha nền



Hình 5. Kết quả FFT và một số phương pháp xấp xỉ cho mô hình Random: vật liệu A (bên trái), vật liệu B (bên phải)



Hình 6. So sánh kết quả FFT giữa các mô hình: Vật liệu A (bên trái), vật liệu B (bên phải)

5. KẾT LUẬN

Với cách tiếp cận dựa trên mô phỏng số FFT, bài báo đã xây dựng được thuật toán FFT và chương trình số sử dụng phần mềm Matlab để tính mô đun đàn hồi thể tích vĩ mô cho vật liệu hai pha dạng nền - cốt liệu tròn sắp xếp tuần hoàn trong không gian hai chiều. So sánh giữa kết quả mô phỏng số FFT và các phương pháp xấp xỉ khác cho thấy FFT luôn nằm trong đánh giá của HS trong khi các phương pháp xấp xỉ khác có thể nằm ngoài hoặc nằm trên biên của HS. Điều đó chứng tỏ mô phỏng số FFT cho kết quả chính xác và tin cậy hơn so với các phương pháp xấp xỉ khác.

LỜI CẢM ƠN

Tác giả cảm ơn sự hỗ trợ của Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội trong nghiên cứu, ngoài ra bài báo được thực hiện trong khuôn khổ đề tài nghiên cứu cơ bản mã số 107.02-2018.15 do quỹ Nafosted tài trợ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Bonnet G.(2007). Effective properties of elastic periodic composite media with fibers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **55**, 881-899.
- [2]. Eshelby, J.D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. Lond.*, **A 41**, pp.376-396.
- [3]. Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, pp.127-140.
- [4]. Mori T.and Tanaka K.(1973). Averages stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.* **21**, 571-574.
- [5]. Michel, J.C, Moulinec, H, Suquet, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **172**, pp.109–143.

- [6]. Nemat-Nasser S, Hori M. (1999). Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials. *Amsterdam; New York: Elsevier*, 786p.
- [7]. Nguyen Van Luat, Nguyen Trung Kien. FFT-simulations and multi-coated inclusion model for macroscopic conductivity of 2D suspensions of compound inclusions. *Vietnam Journal of Mechanics*, 169-176, *Volume 37* (2015).
- [8]. Pham D.C, Vu L.D, Nguyen V.L. (2013). Bounds on the ranges of the conductive and elastic properties of randomly inhomogeneous materials. *Philosophical Magazine* **93**, pp.2229-2249.
- [9]. Pham, D.C. Essential solid mechanics. Institute of Mechanics, *Hanoi*, (2013).