

Phân tích động lực học dầm Composite trên nền đàn hồi dưới tác dụng tải trọng di động

Dynamic analysis of composite beams resting on winkler foundation under a moving load

Ngày nhận bài: 29/6/2017

Ngày sửa bài: 21/7/2017

Ngày chấp nhận đăng: 5/8/2017

**Đặng Xuân Hiếu, Nguyễn Ngọc Dương,
Nguyễn Trung Kiên**

TÓM TẮT

Bài báo này nghiên cứu ứng xử động lực học của dầm composite trên nền đàn hồi chịu tải trọng di động. Mô hình dầm sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Tải trọng di chuyển với vận tốc không đổi. Sự tương tác giữa dầm và nền thông qua hệ số nền Winkler. Trường chuyển vị được xấp xỉ bằng các hàm lượng giác thỏa mãn các điều kiện biên khác nhau. Phương trình động lực học của dầm được thiết lập dựa trên phương trình Lagrange và giải bằng phương pháp số Newmark. Các ví dụ số được thực hiện để kiểm chứng với các nghiên cứu trước đó và khảo sát sự ảnh hưởng của các thông số: độ cứng nền Winkler, tần số lực kích thích, vận tốc di chuyển tải trọng, tỷ số chiều dài/chiều cao dầm, tỷ lệ mô đun đàn hồi, hướng sợi gia cường... đến ứng xử động lực học của dầm.

ABSTRACT

This paper presents dynamic behaviors of composite beams resting on an elastic foundation under a moving load. Beam model bases on a higher-order shear deformation theory. A harmonic load moves with constant velocity. The interaction between the beam and the elastic foundation is represented by the Winkler coefficient. The displacement fields are approximated by shape functions satisfied different boundary conditions. Equations of motion are derived from Lagrange's equations and Newmark method are used to solve equations of motion. Numerical results are conducted to verify with previous studies. Effects of stiffness of the Winkler foundation, excitation frequency, velocity of the moving load, span-to-leph ratio, material anisotropy, the fiber orientation... on the dynamic behaviors of the composite beams are investigated.

Đặng Xuân Hiếu

giảng viên cao học, Khoa Xây Dựng, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật thành phố Hồ Chí Minh.

Nguyễn Ngọc Dương

giảng viên, Khoa Xây Dựng, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật thành phố Hồ Chí Minh.

Nguyễn Trung Kiên

giảng viên, Khoa Xây Dựng, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật thành phố Hồ Chí Minh.

1. Giới thiệu

Composite là vật liệu hỗn hợp, được tạo nên từ hai hay nhiều vật liệu khác nhau. Do có những ưu điểm như độ cứng lớn, trọng lượng nhẹ, chống ăn mòn tốt và đặc biệt là khả năng thay đổi hướng sợi để đáp ứng độ cứng theo yêu cầu thiết kế nên vật liệu composite đã được sử dụng rất phổ biến trong các ngành kỹ thuật. Một số sản phẩm dùng vật liệu composite như: vỏ tên lửa, máy bay, tàu vũ trụ, bình chịu áp lực cao, ống dẫn xăng dầu, hóa chất, vỏ tàu thuyền... Để phát triển và ứng dụng rộng rãi hơn nữa loại vật liệu ưu việt này trong đời sống và kỹ thuật, cần có nhiều những nghiên cứu, phân tích về ứng xử cơ học của nó. Trong lĩnh vực cơ học nói chung và kết cấu xây dựng nói riêng, ứng xử của phần tử dầm thường được phân tích, nghiên cứu nhiều vì sự phổ biến của nó. Mô hình dầm trên nền đàn hồi chịu tải trọng di động cũng được ứng dụng rất rộng rãi mà bài toán đường ray xe lửa (tàu điện) chính là ví dụ điển hình nhất.

Nhiều nghiên cứu được thực hiện để phân tích ứng xử của dầm composite, trong đó, ứng xử động được quan tâm hơn cả bởi vì đây là một trong những thuộc tính quan trọng của dầm [1-12]. Trong các nghiên cứu này, các tác giả đều sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao để mô tả trường chuyển vị. So với lý thuyết dầm cổ điển và lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao dự đoán ứng xử của dầm chính xác hơn [12]. Điều này giải thích tại sao lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được sử dụng khá phổ biến. Bài toán dầm đặt trên nền cũng đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới [13-26]. Nhiều mô hình nền được đề xuất nhằm mô tả chính xác ứng xử thực tế của dầm, có thể kể ra như: mô hình nền Winkler [13-14]; mô hình nền hai thông số của Valsangkar, A.J và R. Pradhanang [17], Franciosi, C. và A. Masi [18]; mô hình nền ba thông số của Radeş, Mircea [25], Morfidis, K. và I. E. Avramidis [26]... Trong đó, mô hình nền Winkler là đơn giản và áp dụng phổ biến nhất [19]. Vấn đề tải trọng di động cũng được nhiều tác giả quan tâm khảo sát, điều này được thể hiện qua các nghiên cứu [27-30]. Simsek và Kocaturk [27] đã phân tích ứng xử

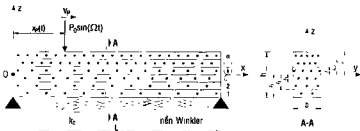
đồng của dầm vật liệu phân lớp chức năng điều kiện biên tựa đơn chịu tải tập trung đi đồng điều hòa. Trong nghiên cứu này, lý thuyết dầm Euler-Bernoulli được sử dụng. Zeki Kiral và Binnur Goren Kiral [28] sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn để nghiên cứu ứng xử động học của dầm composite nhiều lớp đối xứng chịu tải trọng tập trung di chuyển với vận tốc không đổi. Volkan Kahya và Ayman S. Mosallam [29] dự đoán ứng xử động của dầm sandwich chịu tác dụng của khối lượng đi đồng bằng phương pháp giải tích. Ứng xử phi tuyến của dầm composite trong môi trường nhiệt chịu tải trọng đi đồng được đề cập trong nghiên cứu của Chang Tao, Yi-Ming Fu và Hong-Liang Dai [30]. Trong tài liệu này, các tác giả sử dụng nguyên lý Hamilton để thiết lập phương trình chuyển động phi tuyến và các ứng xử động học được xác định từ lời giải Galerkin và Newmark. Có thể thấy rằng rất nhiều đề tài khoa học trên thế giới đã tiến hành nghiên cứu, phân tích dầm composite. Tuy nhiên, vấn đề ứng xử động học của dầm composite chịu tải trọng đi đồng trên nền đàn hồi vẫn chưa được đề cập cụ thể và chi tiết. Vì vậy, vấn đề thứ vi này cần được tập trung nghiên cứu.

Mục tiêu của bài báo là phân tích động lực học dầm composite trên nền đàn hồi dưới tác dụng của tải trọng đi đồng sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Trong phạm vi giới hạn, bài báo khảo sát vật liệu composite trục hướng với cốt gia cường dạng sợi. Phương trình Lagrange và lời giải Ritz được áp dụng để thiết lập phương trình chuyển động. Phương pháp rời rạc Newmark được lựa chọn để giải phương trình động học nhằm thu được chuyển vị của dầm. Ảnh hưởng của các yếu tố: hệ số nền đàn hồi Winkler, tần số lực kích thích, vận tốc di chuyển tải trọng, tỷ số chiều dài/chiều cao dầm, tỷ lệ mô đun đàn hồi, hướng sợi gia cường... đến ứng xử động học của dầm được khảo sát.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1 Vật liệu composite - Mô hình bài toán

Khảo sát dầm composite có chiều dài L , chiều rộng b , chiều cao h , chịu tải trọng điều hòa đi đồng trên nền đàn hồi trong hệ trục tọa độ (x, y, z) như Hình 1.



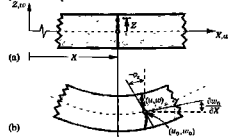
Hình 1. Mô hình dầm composite nhiều lớp chịu tải trọng điều hòa đi đồng trên nền đàn hồi Winkler

Dầm gồm n lớp vật liệu composite trục hướng chiều dày bằng nhau với hướng sợi gia cường lệch với trục x một góc θ . Tải trọng điều hòa $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$ di chuyển với vận tốc không đổi v_p . Giả định rằng lực tải vào dầm bất kỳ thời điểm bắt đầu khảo sát $t = 0$. Khi tần số lực kích thích $\Omega = 0$, tải trọng xem như tải tập trung đi đồng $P(t) = P_0$. Dầm khảo sát tựa trên nền đàn hồi Winkler. Ứng xử của nền có thể được mô hình như một hệ lò xo độc lập mà biến dạng đàn hồi của chúng tỷ lệ với áp lực tác dụng thông qua hệ số nền

$$p(x, t) = k_z w_0(x, t) \quad (1)$$

Trong đó, k_z là hệ số phản lực nền Winkler, $w_0(x, t)$ là chuyển vị thẳng đứng tại điểm đang xét

2.2 Lý thuyết dầm bậc cao



Hình 2. Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao [32]

Trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao [32]:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - zw_{0,x} + f(z)\phi(x, t) \quad (2)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (2)$$

Trong đó $u(x, z, t)$, $w(x, z, t)$ tương ứng là chuyển vị dọc ngang của điểm bất kỳ trên dầm tại thời điểm xác định; $u_0(x, t)$

$w_0(x, t)$ lần lượt là chuyển vị dọc và ngang của trục trung tâm $\phi(x, t)$ là góc xoay của tiếp tuyến mặt cắt tiết diện ngang tại trục trung hòa; dấu phẩy (') phía dưới biểu thị đạo hàm theo chỉ số tương ứng nằm dưới. Hàm $f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$ [31] là hàm bậc cao của thuyết dầm xét.

Biến dạng tương ứng với trường chuyển vị:

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} = u_{0,x} - zw_{0,xx} + f(z)\phi_{,x} \quad (3)$$

$$\gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} = f_{,z}\phi \quad (3)$$

Trường ứng suất của lớp dầm thứ k như sau [32]:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \overline{Q}_{11}^{(k)} \varepsilon_{xx} \quad (4)$$

$$\sigma_{xz}^{(k)} = \overline{Q}_{35}^{(k)} \gamma_{xz} \quad (4)$$

Trong đó $\overline{Q}_{11}^{(k)}$, $\overline{Q}_{35}^{(k)}$ lần lượt là các hệ số độ cứng giảm trong ngoài mặt phẳng uốn của lớp thứ k quy về hệ tọa độ tổng thể, đo cho như sau [32]:

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (5)$$

$$\overline{Q}_{35} = Q_{44} \sin^2 \theta + Q_{55} \cos^2 \theta \quad (5)$$

Với:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (6)$$

$$Q_{12} = \nu_{12} Q_{22}; \quad Q_{44} = G_{23}; \quad Q_{55} = G_{12}; \quad Q_{66} = G_{12} \quad (6)$$

$E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}$ là các hằng số đàn hồi của vật liệu

hướng; ν_{12}, ν_{21} là các hệ số Poisson.

2.3 Thiết lập phương trình động lực học

Năng lượng biến dạng đàn hồi của dầm [32]:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} + \sigma_w \gamma_w) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L [A_{\alpha} (u_{,\alpha})^2 - 2B_{\alpha} u_{,\alpha} w_{,\alpha} + D_{\alpha} (w_{,\alpha})^2 \\
&\quad + 2E_{\alpha} w_{,\alpha} \phi_{,\alpha} - 2F_{\alpha} w_{,\alpha} \phi + H_{\alpha} (\phi_{,\alpha})^2 + K_{\alpha} \phi^2] dx
\end{aligned} \quad (7)$$

Trong đó $A_{\alpha}, B_{\alpha}, D_{\alpha}, E_{\alpha}, F_{\alpha}, H_{\alpha}, K_{\alpha}$ là các độ cứng của dầm composite nhiều lớp, được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}
(A_{\alpha}, B_{\alpha}, D_{\alpha}, E_{\alpha}, F_{\alpha}, H_{\alpha}) \\
= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2) \bar{Q}_{11}^{(k)} dz
\end{aligned} \quad (8a)$$

$$K_{\alpha} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (f_{, \alpha})^2 \bar{Q}_{55}^{(k)} dz \quad (8b)$$

Động năng của dầm [32]

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \int_V \rho(x) (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_0 (\dot{u}_0 + \dot{w}_0)^2 - 2I_1 \dot{u}_0 \dot{w}_{0,x} + I_2 (\dot{w}_{0,x})^2 \right. \\
&\quad \left. + 2J_1 \dot{u}_0 \dot{\phi} - 2J_2 \dot{w}_{0,x} \dot{\phi} + K_1 \dot{\phi}^2 \right] dx
\end{aligned} \quad (9)$$

Trong đó đạo hàm theo thời gian được biểu thị bằng dấu chấm đặt trên mỗi đại lượng; $(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2)$ là các khối lượng quán tính của dầm được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}
(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2) \\
= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho(z)^{(i_k)} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2) dz
\end{aligned} \quad (10)$$

Công do lực di động trên dầm [27]:

$$V_p = P(t) w_0(x_p, t) [c(t-t_1) - c(t-t_2)] \quad (11)$$

Trong đó x_p là vị trí của lực $P(t)$ tại thời điểm t : $x_p = v_p t$;

$$0 \leq x_p \leq L; \quad t_1 = 0 \leq t \leq t_2 = L/v_p; \quad c(\Delta t) = \begin{cases} 1 & (\Delta t \geq 0) \\ 0 & (\Delta t < 0) \end{cases} \quad \text{với}$$

v_p là vận tốc di chuyển của lực, t_1 là thời điểm lực đi vào dầm, t_2 là thời điểm lực đi ra khỏi dầm.

Công do nền đàn hồi Winkler [14]:

$$V_w = -\frac{1}{2} \int_0^L k_w w_0(x, t) w_0(x, t) dx \quad (12)$$

Từ phương trình (11) và (12) ta có tổng công do ngoại lực trên dầm:

$$\begin{aligned}
V = V_p + V_w = P(t) w_0(x_p, t) [c(t-t_1) - c(t-t_2)] \\
- \frac{1}{2} \int_0^L k_w w_0(x, t) w_0(x, t) dx
\end{aligned} \quad (13)$$

Tổng năng lượng của cơ hệ:

$$\Pi = U + V - K \quad (14)$$

Để thiết lập phương trình chuyển động, các hàm chuyển vị được xấp xỉ như sau:

$$w_0(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) w_i(x) \quad (15a)$$

$$u_0(x, t) = \sum_{i=1}^n b_i(t) u_i(x) \quad (15b)$$

$$\phi(x, t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \phi_i(x) \quad (15c)$$

Trong đó $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$ là các tọa độ suy rộng phụ thuộc thời gian và là các đại lượng cần tìm, $w_i(x), u_i(x), \phi_i(x)$ là các hàm dạng được cho trong Bảng 1 [12] với 3 điều kiện biên khác nhau của dầm gồm: tựa đơn - tựa đơn (S-S), ngàm - tự do (C-F) và ngàm - ngàm (C-C). Có thể thấy rằng các hàm dạng trên thoả các điều kiện biên động học của dầm được cho ở Bảng 2.

Bảng 1. Các hàm xấp xỉ chuyển vị

Điều kiện biên	Hàm dạng	
	$w_i(x)$	$u_i(x), \phi_i(x)$
S-S	$\sin\left(\frac{i\pi}{L}x\right)$	$\cos\left(\frac{i\pi}{L}x\right)$
C-F	$1 - \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2L}x\right)$	$\sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2L}x\right)$
C-C	$\sin^2\left(\frac{i\pi}{L}x\right)$	$\sin\left(\frac{2i\pi}{L}x\right)$

Bảng 2. Các điều kiện biên động học của dầm

Điều kiện biên	Điều kiện ràng buộc	
	$x = 0$	$x = L$
S-S	$w_0 = 0$	$w_0 = 0$
C-F	$w_0 = 0, u_0 = 0,$ $\phi = 0, w_{0,x} = 0$	
C-C	$w_0 = 0, u_0 = 0,$ $\phi = 0, w_{0,x} = 0$	$w_0 = 0, u_0 = 0,$ $\phi = 0, w_{0,x} = 0$

Phương trình Lagrange được viết:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (16)$$

Thay các phương trình (7), (9), (13), (15) vào (14) và sử dụng phương trình Lagrange cho bởi (16) với q_i đại diện cho $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$, ta thu được phương trình chuyển động:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} \\ {}^T\mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} \\ {}^T\mathbf{K}^{13} & {}^T\mathbf{K}^{23} & \mathbf{K}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{c}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{M}^{12} \\ {}^T\mathbf{M}^{12} & \mathbf{M}^{22} \\ {}^T\mathbf{M}^{13} & {}^T\mathbf{M}^{23} & \mathbf{M}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}}(t) \\ \dot{\mathbf{b}}(t) \\ \dot{\mathbf{c}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Các ma trận độ cứng $\mathbf{K}$, ma trận khối lượng $\mathbf{M}$ và vectơ tải $\mathbf{F}(t)$ được viết cụ thể như sau:

$$K_y^{11} = D_m \int_0^L w_{,xx} w_{,xx} dx + k \int_0^L w_{,x} w_{,x} dx$$

$$K_y^{12} = A_m \int_0^L u_{,x} u_{,x} dx; K_y^{12} = -B_m \int_0^L w_{,xx} u_{,x} dx$$

$$K_y^{21} = H_m \int_0^L \phi_{,x} \phi_{,x} dx + K_m \int_0^L \phi \phi dx$$

$$K_y^{22} = -F_m \int_0^L w_{,xx} \phi_{,x} dx; K_y^{22} = E_m \int_0^L u_{,x} \phi_{,x} dx$$

$$M_y^{11} = I_0 \int_0^L w_{,x} w_{,x} dx + I_2 \int_0^L w_{,x} w_{,x} dx$$

$$M_y^{22} = I_0 \int_0^L u_{,x} u_{,x} dx; M_y^{22} = -I_2 \int_0^L w_{,xx} u_{,x} dx$$

$$M_y^{33} = K_2 \int_0^L \phi \phi dx; M_y^{33} = -J_2 \int_0^L w_{,x} \phi dx$$

$$M_y^{22} = J_1 \int_0^L u_{,x} \phi dx; F_i(t) = P(t) w_i(x_r) \quad (18)$$

2.4 Giải phương trình động lực học

Dạng thu gọn của phương trình chuyển động (17) được viết lại như sau:

$$\mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{F}(t) = 0 \quad (19)$$

Trong đó $\mathbf{q}(t) = [\mathbf{a}(t) \ \mathbf{b}(t) \ \mathbf{c}(t)]^T$ là tọa độ suy rộng phụ thuộc thời gian. Trong bài toán phân tích dao động tự do, tọa độ suy rộng theo thời gian được cho dưới dạng $\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}}(t)e^{i\omega t}$ với $i^2 = -1$ và ω là tần số góc tự nhiên của dầm. Các tần số tự nhiên này là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (20)$$

Đối với bài toán dầm chịu tải di động điều hòa theo thời gian, phương pháp Newmark được sử dụng để giải phương trình chuyển động (19). Phương trình số gia của chuyển động giữa hai thời điểm i và $i+1$ được cho bởi:

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{q}_i = \Delta\mathbf{F}_i \quad (21)$$

Trong đó $\Delta\ddot{\mathbf{q}}_i$, $\Delta\mathbf{q}_i$ và $\Delta\mathbf{F}_i$ tương ứng là các vectơ số gia của gia tốc, chuyển vị và tải trọng ngoài. Sử dụng phương pháp trung bình gia tốc (phương pháp Newmark với các hệ số $\gamma = 1/2$; $\beta = 1/4$) với giả thiết sự biến thiên của gia tốc trong một bước thời gian là hằng số, ta có

$$\Delta\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i = \frac{4}{\Delta t^2} \Delta\mathbf{q}_i - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{q}}_i - 2\ddot{\mathbf{q}}_i \quad (22a)$$

$$\Delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_{i+1} - \dot{\mathbf{q}}_i = \frac{2}{\Delta t} \Delta\mathbf{q}_i - 2\dot{\mathbf{q}}_i \quad (22b)$$

Thay phương trình (22) vào (19), số gia của chuyển vị có thể được tính như sau:

$$\mathbf{K}_i^{\text{eff}} \Delta\mathbf{q}_i = \Delta\mathbf{F}_i^{\text{eff}}$$

Với $\mathbf{K}_i^{\text{eff}}$ là độ cứng hiệu dụng và $\Delta\mathbf{F}_i^{\text{eff}}$ là số gia tải trọng duy:

$$\mathbf{K}_i^{\text{eff}} = \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K} \quad (23)$$

$$\Delta\mathbf{F}_i^{\text{eff}} = \Delta\mathbf{F}_i + \left(\frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{q}}_i + 2\ddot{\mathbf{q}}_i \right) \mathbf{M} \quad (24)$$

Sau khi giải phương trình (23), giá trị chuyển vị, vận tốc và gia tốc thời điểm $i+1$ được tính dựa vào vectơ số gia chuyển vị $\Delta\mathbf{q}_i$ như

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Delta\mathbf{q}_i \quad (25)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{i+1} = -\dot{\mathbf{q}}_i + \frac{2}{\Delta t} \Delta\mathbf{q}_i \quad (26)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} = -\ddot{\mathbf{q}}_i + \frac{4}{\Delta t^2} \Delta\mathbf{q}_i - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{q}}_i \quad (27)$$

3. Ví dụ số

Phần này khảo sát sự hội tụ của lời giải, so sánh các kết quả nghiệm với các kết quả đã công bố và khảo sát ảnh hưởng của các yếu tố nền đàn hồi Winkler, tần số lực kích thích, vận tốc di chuyển trọng tải $S/L/h$, tỷ lệ mô đun đàn hồi, hướng sợi gia cường... đến xử của dầm composite thông qua các ví dụ số. Các thông số vật lý các ví dụ được cho trong Bảng 3 và 4. Để thuận tiện trong tính toán đại lượng không thứ nguyên sau đây được sử dụng trong các ví dụ

$$\text{hệ số nền Winkler } \alpha = \frac{k_s L^4}{EI}, \text{ vận tốc tải trọng } \beta = \frac{T v_p}{L} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{tần số } \bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$$

Bảng 3. Thông số vật liệu

Đặc tính cơ học vật liệu			
$E_1/E_2 = 40$	$E_1 = 241.5 \text{ GPa}$	$G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2$	ν
$G_{23} = 0.5 E_2$	$\nu_{12} = 0.25$	$\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$	

Bảng 4. Thông số các ví dụ

Ví dụ (VD)	b (m)	h (m)	L/h	α	P_0 (MN)	Ω (rad/s)	v_p (m/s)
1	1	0.1	10	10	-	-	-
2,3	1	0.1	50	10	1	20	10
4	1	0.1	-	-	-	-	-
5	0.25	0.25	40	-	1	-	2
6,11	0.25	0.25	40	10	1	-	-
7	0.25	0.25	40	-	1	0	-
8	0.25	0.25	-	10	1	-	10
9,10	0.25	0.25	40	10	1	-	2

3.1 Khảo sát sự hội tụ

Ví dụ 1, 2 và 3 nhằm khảo sát sự hội tụ của lời giải. Dầm composite dùng [0;90;0] với các điều kiện biên khác nhau được phân tích số không thứ nguyên (VD1) và chuyển vị (VD2) dầm cho cả ba điều kiện S-S, C-F và C-C lần lượt được thể hiện ở Bảng 5 và 6. Kết quả thấy tần số và chuyển vị của dầm hội tụ tại $N = 12$ và giá trị này

chọn để xuất kết quả cho các ví dụ số. Bảng 7 cho thấy sự hội của chuyển vị (VD3) theo bước thời gian tính toán là $RL = 200$

Bảng 5. Sự hội tụ tần số không thứ nguyên dầm [0;90;0]

N	Điều kiện biên		
	S-S	C-F	C-C
2	14.7849	8.0253	21.2319
4	14.7849	7.9890	20.8109
6	14.7849	7.9778	20.7039
8	14.7849	7.9730	20.6654
10	14.7849	7.9705	20.6485
12	14.7849	7.9692	20.6401
14	14.7849	7.9684	20.6354
16	14.7849	7.9679	20.6327

Bảng 6. Sự hội tụ chuyển vị lớn nhất (m) tại giữa dầm [0;90;0]

N	Điều kiện biên		
	S-S	C-F	C-C
2	0.0813	0.2773	0.0172
4	0.0799	0.2752	0.0174
6	0.0796	0.2753	0.0175
8	0.0797	0.2756	0.0175
10	0.0798	0.2756	0.0176
12	0.0797	0.2756	0.0176
14	0.0797	0.2756	0.0176
16	0.0797	0.2757	0.0176

Bảng 7. Sự hội tụ chuyển vị lớn nhất (m) tại giữa dầm [0;90;0]

RL	Điều kiện biên		
	S-S	C-F	C-C
10	0.0712	0.2773	0.0154
25	0.0811	0.2773	0.0169
50	0.0811	0.2773	0.0171
75	0.0811	0.2773	0.0172
100	0.0812	0.2773	0.0171
125	0.0813	0.2773	0.0171
150	0.0813	0.2773	0.0172
200	0.0813	0.2773	0.0172
250	0.0813	0.2773	0.0172

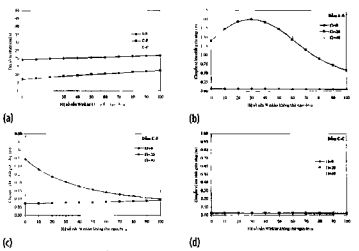
3.2 So sánh kết quả nghiên cứu
Trong ví dụ 4, các dầm composite đối xứng [0;90;0] và không đối xứng [0;90] được khảo sát. Kết quả tần số không thứ nguyên cho trong Bảng 8, 9 và được so sánh với kết quả của các tác giả khác. Kết quả cho thấy lời giải hiện tại rất gần với các kết quả đã công bố.

Bảng 8. Tần số không thứ nguyên dầm [0;90;0]

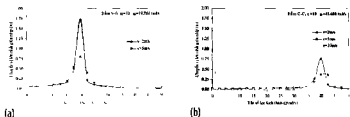
Điều kiện biên	Tham khảo	L/h		
		5	20	50
S-S	Nghiên cứu	9.225	16.337	17.462
	Nguyen và cộng sự [12]	9.208	16.338	17.462
	Murthy và cộng sự [5]	9.207	-	-
	Khdeir, Reddy [2]	9.208	-	-
	Aydogdu [7]	9.207	16.337	-
	Mantari, Canales [11]	9.208	-	-
C-F	Nghiên cứu	4.247	6.070	6.267
	Nguyen và cộng sự [12]	4.234	6.070	6.267
	Murthy và cộng sự [5]	4.230	-	-
	Khdeir, Reddy [2]	4.234	-	-
	Aydogdu [7]	4.234	6.070	-
	Mantari, Canales [11]	4.221	-	-
C-C	Nghiên cứu	11.766	29.710	37.671
	Nguyen và cộng sự [12]	11.607	29.695	37.679
	Murthy và cộng sự [5]	11.602	-	-
	Khdeir, Reddy [2]	11.603	-	-

Điều kiện biên	Tham khảo	L/h		
		5	20	50
	Aydogdu [7]	11.637	29.926	
	Mantari, Canales [11]	11.486		
Bảng 9. Tần số không thứ nguyên dầm [0;90]				
Điều kiện biên	Tham khảo	L/h		
		5	20	50
S-S	Nghiên cứu	6.153	7.221	7.303
	Nguyen và cộng sự [12]	6.128	7.219	7.302
	Murthy và cộng sự [5]	6.045	-	-
	Khdeir, Reddy [2]	6.128	-	-
	Aydogdu [7]	6.144	7.218	-
	Mantari, Canales [11]	6.109	-	-
C-F	Nghiên cứu	2.389	2.591	2.605
	Nguyen và cộng sự [12]	2.383	2.591	2.605
	Murthy và cộng sự [5]	2.378	-	-
	Khdeir, Reddy [2]	2.386	-	-
	Aydogdu [7]	2.384	2.590	-
	Mantari, Canales [11]	2.375	-	-
C-C	Nghiên cứu	10.165	15.683	16.433
	Nguyen và cộng sự [12]	10.027	15.661	16.429
	Murthy và cộng sự [5]	10.011	-	-
	Khdeir, Reddy [2]	10.026	-	-
	Aydogdu [7]	10.102	15.688	-
	Mantari, Canales [11]	9.974	-	-

3.3 Ảnh hưởng của các yếu tố đến ứng xử của dầm
Các thông số có ảnh hưởng đến ứng xử của dầm composite nhiều lớp: hệ số nền Winkler, tần số kích thích, vận tốc tải trọng, tỷ số L/h , tỷ lệ mô đun đàn hồi, hướng sợi gia cường. được khảo sát trong ví dụ 5 đến ví dụ 11. Trong đó, mô hình dầm khảo sát là dầm composite ba lớp [0;90;0].
Ví dụ 5: Ảnh hưởng của hệ số nền Winkler đến tần số và chuyển vị của dầm được khảo sát và thể hiện trên Hình 3. Có thể thấy rằng khi tăng hệ số nền thì tần số dầm sẽ tăng và chuyển vị dầm sẽ giảm ($\Omega \rightarrow 0$). Mức độ ảnh hưởng của hệ số nền đến ứng xử dầm giảm theo thứ tự: C-F $\rightarrow$ S-S $\rightarrow$ C-C.

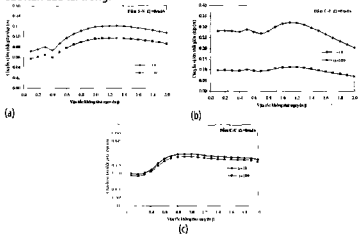


Hình 3. Tần số và chuyển vị giữa nhịp dầm theo hệ số nền Winkler
Ví dụ 6: Ví dụ này khảo sát ảnh hưởng của tần số kích thích lên chuyển vị của dầm. Hình 4 cho thấy khi tần số kích thích bằng tần số riêng của dầm thì xảy ra hiện tượng cộng hưởng. Khi đó giá trị chuyển vị dầm sẽ đạt cực đại. Giá trị cực đại của chuyển vị khi xảy ra cộng hưởng giảm khi vận tốc tải trọng tăng.



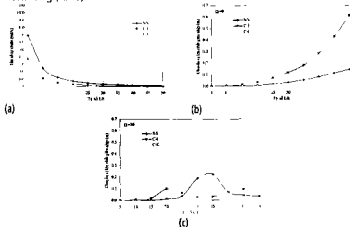
Hình 4. Chuyển vị giữa nhịp dầm theo tần số kích thích

Ví dụ 7: Vận tốc tải trong ảnh hưởng đến chuyển vị của dầm được khảo sát ở ví dụ này. Hình 5 cho thấy chuyển vị của dầm sẽ đạt cực trị với các hệ số vận tốc khác nhau ($\Omega=0$): S-S là $\beta=1.2$, C-F là $\beta=1.1$ và C-C là $\beta=0.9$. Áp dụng bài toán này có thể xác định được vận tốc cực hạn của tải trong.



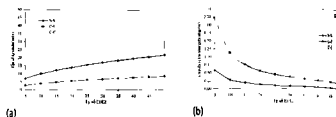
Hình 5. Chuyển vị giữa nhịp dầm theo vận tốc không thứ nguyên

Ví dụ 8: Mối quan hệ giữa tỷ số L/h với tần số, chuyển vị dầm thể hiện trên Hình 6. Khi tăng tỷ số L/h thì tần số dầm giảm và chuyển vị dầm tăng ($\Omega=0$)



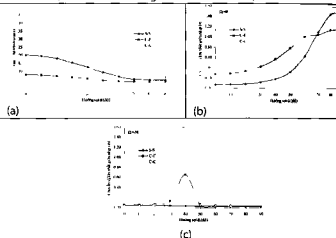
Hình 6. Tần số và chuyển vị giữa nhịp dầm theo tỷ số L/h

Ví dụ 9: Sự ảnh hưởng của tỷ số E_1/E_2 đến ứng xử dầm được khảo sát. Nếu cố định giá trị E_2 và tăng dần giá trị E_1 thì tần số dầm sẽ tăng và chuyển vị dầm sẽ giảm ($\Omega=0$) như thể hiện trên Hình 7.



Hình 7. Tần số và chuyển vị dầm theo tỷ số E_1/E_2 ($E_2=60\text{Pa}$)

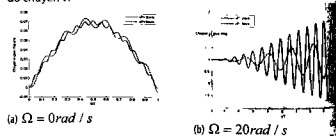
Ví dụ 10: Khi tăng góc sợi θ thì tần số dầm $[\theta; -\theta]$ giảm chứ không tăng. Ảnh hưởng của hướng sợi đến tần số dầm là rõ rệt khi $\theta \leq 70^\circ$. Khi $\Omega=0$, nếu tăng góc θ thì chuyển vị của dầm sẽ tăng (Hình 8). Ảnh hưởng của hướng sợi đến chuyển vị dầm là rõ rệt $\theta \geq 40^\circ$ (đặc biệt ảnh hưởng nhiều đến dầm S-S)



Hình 8. Tần số và chuyển vị giữa nhịp dầm $[\theta; -\theta]$ theo góc θ

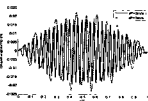
Các nhận xét trên là đúng đối với tải trọng di động nhưng khi dao động ($\Omega \neq 0$). Trong trường hợp tải trọng di động điều ($\Omega \neq 0$), do quan hệ tương tác giữa tần số kích thích và tần số của dầm, ảnh hưởng của các yếu tố kể trên đến ứng xử của dầm khi tuân theo quy luật cụ thể

Ví dụ 11: Kết quả bài toán chuyển vị giữa dầm S-S theo thời gian được thể hiện trên Hình 9 với các giá trị khác nhau của tần số tải kích thích và vận tốc tải trong. Có thể nhận thấy với cùng một giá trị dạng biểu đồ chuyển vị của điểm giữa dầm là giống nhau. Khi vận tốc tải trong tăng thì số lần dao động của dầm giảm. Còn khi tăng tỷ số kích thích sẽ làm tăng số lần dao động của dầm. Ngoài ra, cũng cần chú ý đến vận tốc tải di động vì nó có ảnh hưởng đến thời gian thích của tải trong trên dầm, do đó có ảnh hưởng đến biên độ của độ chuyển vị



(a) $\Omega = 0 \text{ rad/s}$

(b) $\Omega = 20 \text{ rad/s}$



(c) $\Omega = 40 \text{ rad/s}$

Hình 9. Chuyển vị tại giữa dầm S-S theo thời gian

4. Kết luận

Bài báo đã tiếp cận và giải quyết một bài toán cụ thể trong thực tế: bài toán đường ray xe lửa (tàu điện) bằng mô hình dầm composite trên nền đàn hồi chịu tải trọng di động điều hòa. Lý thuyết biến dạng cắt ác cao được sử dụng để mô tả trường chuyển vị. Các nguyên lý năng lượng, phương trình Lagrange, hàm dạng xấp xỉ được áp dụng để thiết lập phương trình chuyển động. Phương pháp rời rạc Newmark được sử dụng để giải phương trình chuyển động. Các yếu tố có ảnh hưởng đến ứng xử của dầm như độ cứng của nền đàn hồi Winkler, tần số lực kích thích, vận tốc di chuyển tải trọng, tỷ số L/h , tỷ lệ mô đun đàn hồi, ứng suất gia cường,... đều đã được khảo sát một cách chi tiết và rút ra những kết luận hữu ích. Các kết quả khảo sát được so sánh với kết quả đã nghiên cứu trước, đã chứng minh tính chính xác và hiệu quả của nghiên cứu này. Một số kết quả đã được trình bày làm cơ sở cho việc nghiên cứu tiếp theo.

Lời cảm ơn:

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ quốc gia (Nafosted) số No.107.02-2015.07

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. K. Chandrasekhara, K. M. Banger. Free vibration of composite beams using a refined shear flexible beam element. *Computers & Structures* Vol.43, No 4, pp 719-727, 1992.
2. A. A. Khider, J. N. Reddy. Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions. *Int J Engng Sci* Vol 32, No.12, pp 1971-1980, 1994
3. H. Matsunaga. Vibration and buckling of multilayered composite beams according to higher order deformation theories. *Journal of Sound and Vibration* (2001) 246(1), 47-62.
4. W.Q. Chen, C.F. Li, Z.G. Bian. Free vibration analysis of generally laminated beams via finite-spline-based differential quadrature. *Composite Structures* 63 (2004) 417-425.
5. M.V.V.S. Murthy, D. Ray Mahapatra, K. Badarinarayana, S. Gopalakrishnan. A refined higher order element for asymmetric composite beams. *Composite Structures* 67 (2005) 27-35.
6. Metin Aydogdu. Free vibration analysis of angle-ply laminated beams with general boundary conditions. *Journal of reinforced plastics and composites* Vol. 25, No. 15/2006, 1571-13
7. Metin Aydogdu. Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2005) 1740-1755.
8. P. Subramanian. Dynamic analysis of laminated composite beams using higher order terms and finite elements. *Composite Structures* 73 (2006) 342-353.
9. Thuc P. Vo, Huu-Tai Thai. Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences* 62 (2012) 67-76.
10. M. Moinahammad Abadi, A.R. Daneshmehr. Modified couple stress theory applied to dynamic analysis of composite laminated beams by considering different beam theories. *International Journal of Engineering Science* 67 (2015) 83-102
11. J.L. Mantari, F.G. Ganales. Free vibration and buckling of laminated beams via hybrid z solution for various penalized boundary conditions. *Composite Structures* Volume 152, 15 September 2016, Pages 306-315.
12. Trung-Kien Nguyen, Ngoc-Duong Nguyen, Thuc P. Vo, Huu-Tai Thai. Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams. *Composite Structures* 160 (2017) 142-151.
13. Winkler, E. *Die Lehre Von Der Und Festigkeit*. Dominicus, Prague, Czech Republic (1867).
14. S.C. Mohanty, R.R. Dash and T. Rout. Parametric instability of a functionally graded isothermo beam on Winkler's elastic foundation. *Nuclear Engineering and Design* 241 (2011) 18-2715.

15. F.F. Calim. Dynamic analysis of beams on viscoelastic foundation. *European Journal of Mechanics A/Solids* 28 (2009) 469-476
16. S.C. Pradhan SC, T. Murmu. Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration* 321 (2009) 342-362
17. Valsangkar, A. J., and R. Pradhanang. Vibrations of beam-columns on two-parameter elastic foundations. *Earthquake engineering & structural dynamics* 16 2 (1988) 217-225.
18. Franciosi, C., and A. Mañá. Free vibrations of foundation beams on two-parameter elastic soil. *Computers & Structures* 47.3 (1993) 419-426
19. K. Morfidis. Vibration of Timoshenko beams on three-parameter elastic foundation. *Computers and Structures* 88 (2010) 294-308
20. M. Ansari, E. Esmailzadeh, D. Younesian. Frequency analysis of finite beams on nonlinear Kelvin-Voigt foundation under moving loads. *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 1455-1471.
21. A. Fallah, M.M. Aghdam. Large amplitude vibration and post-buckling analysis of functionally graded beams on nonlinear elastic foundation. *European Journal of Mechanics A/Solids* 30 (2011) 571-583
22. E.J. Sapountzakis, A.E. Kimpitsis. Nonlinear response of shear deformable beams on tensionless nonlinear viscoelastic foundation under moving loads. *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 5410-5426.
23. H. Asadi, M.M. Aghdam. Large amplitude vibration and post-buckling analysis of variable cross-section composite beams on nonlinear elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences* 79 (2014) 47-55.
24. B.P. Patel, M. Ganapathi, M. Touratiar. Nonlinear free flexural vibrations/post-buckling analysis of laminated orthotropic beams/columns on a two parameter elastic foundation. *Composite Structures* 46 (1999) 189-196.
25. Radej, Murcea. Forced vibrations of a rigid body on a three-parameter foundation. *International Journal of Mechanical Sciences* 13.7 (1971). 573-583.
26. Morfidis, K., and I. E. Avramidis. Exact eigenvalue solutions for and comparative performance of the Kern-type three-parameter model of a beam on elastic foundation. *Proceedings of PACAM X* (2008): 349-52.
27. M. Simsek, T. Kocaturk. Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Composite Structures* 90 (2009) 465-473
28. Zeki Kiral, Binnur Goren Kiral. Dynamic analysis of a symmetric laminated composite beam subjected to a moving load with constant velocity. *Journal of reinforced plastics and composites* Vol. 27, No. 1/2008
29. Vaikan KAHYA, Ayman S. MOSALLAM. Dynamic analysis of composite sandwich beams under moving mass. *Journal of Engineering Sciences* 14(1), 2011.
30. Chang Tao, Yi-Ming Fu, Hong-Liang Dai. Nonlinear dynamic analysis of fiber metal laminated beams subjected to moving loads in thermal environment. *Composite Structures* Volume 140, 15 April 2016, Pages 410-416
31. A. S. Sayyad, Y. M. Ghugal. Effect of transverse shear and transverse normal strain on bending analysis of cross-ply laminated beams. *Int. J. of Appl. Math and Mech* 7 (1 2), 85-118, 2011.
32. J. N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis* Second edition, CRC Press, 2004.