XÂY DỰNG VÀ ÁP DỤNG TIÊU CHUẨN MỚI VỀ ĐAN RỐI CHO HỆ BA MODE DỰA VÀO HỆ THỨC BẤT ĐỊNH

HỒ SỸ CHƯƠNG - TRƯƠNG MINH ĐỨC
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi đã xây dựng tiêu chuẩn mới về đan rối cho hệ ba mode dựa trên các điều kiện đan rối cho trạng thái đa mode do nhóm tác giả Z.G. Li đưa ra năm 2007 [1], bất đẳng thức Schwarz và đặc biệt là hệ thức bất định. Từ các tiêu chuẩn mới thu được, chúng tôi đã khảo sát tính đan rối cho các trạng thái GHZ, trạng thái kết hợp bộ ba trong không gian Fock. Kết quả thu được là sáu trong số tám trạng thái GHZ được khảo sát bị rối hoàn toàn, hai trạng thái còn lại và trạng thái kết hợp bộ ba trong không gian Fock hoàn toàn không bị rối.

1 GIỚI THIỆU

Sự đan rối đóng vai trò quan trong trong lĩnh vực đang ngày càng phát triển nhanh chóng, đó là xử lý thông tin lượng tử. Do đó, việc nghiên cứu và xây dựng các tiêu chuẩn đan rối đang được quan tâm và chú trọng trong lĩnh vực lý thuyết về thông tin lượng tử. Từ khi khái niệm rối lượng tử xuất hiện năm 1935 đến nay, có nhiều tiêu chuẩn đan rối được đưa ra, tuy nhiên không có tiêu chuẩn nào là hoàn hảo. Trong những năm gần đây, các nghiên cứu về rối lượng tử thu được nhiều thành công vượt bậc. Năm 2006 M. Hillery và M.S. Zubairy [2] đã đưa ra một lớp các hệ thức bất định cho việc phát hiện đan rối đối với hệ hai mode. Sau đó, E. Shchukin và W. Vogel [3] đã tổng quát hóa những điều kiện này bằng việc nghiên cứu các tiêu chuẩn không thể chia tách được của các trạng thái lượng tử chia đôi biến liên tục. Cũng trong năm 2006, H. Nha va J. Kim [4] đã đưa ra tiêu chuẩn về rối thông qua hệ thức bất định đại số SU(2) và SU(1,1) để phát hiện ra các trạng thái rối phi Gaussian. Năm 2007 tiếp tục có những nghiên cứu về các điều kiện đan rối cho các trạng thái đa mode của Z.G. Li, S.M. Fei, Z. X. Wang và K. Wu [1].

Tạp chí Khoa học và Giáo dục, Trường Đại học Sư phạm Huế
ISSN 1859-1612, Số 02(26)/2013: tr. 33-39

2 TIÊU CHUẨN MỚI VỀ ĐAN RỐI LƯỢNG TỬ CHO HỆ BA MODE

Trong bài báo [1] được công bố năm 2007, nhóm tác giả Z.G. Li đã đưa ra các toán tử $L_1 = abc^\dagger + a^\dagger b^\dagger c$ và $L_2 = i\left(abc^\dagger - a^\dagger b^\dagger c\right)$; $J_1 = a^\dagger bc + ab^\dagger c^\dagger$ và $J_2 = i\left(a^\dagger bc - ab^\dagger c^\dagger\right)$; $K_1 = ab^\dagger c + a^\dagger bc^\dagger$ và $K_2 = i\left(ab^\dagger c - a^\dagger bc^\dagger\right)$; $K(\varphi) = e^{i\varphi}a^\dagger b^\dagger c^\dagger + e^{-i\varphi}abc$. Trong đó $a^\dagger$, $b^\dagger$, $c^\dagger$ và a, b, c lần lượt là các toán tử sinh hạt và hủy hạt boson tương ứng các mode A, B, C. Từ đó các tác giả đã xây dựng tiêu chuẩn đan rối từng phần và hoàn toàn cho trạng thái ba mode (ABC). Việc đưa ra như vậy tuy thuận lợi trong việc tính toán và thu được tiêu chuẩn đan rối đơn giản, nhưng tính khái quát chưa cao và kết quả áp dụng phù hợp chưa tốt với nhiều trạng thái ba mode. Trên cơ sở đó, chúng tôi đã khái quát hóa bằng cách đưa ra các toán tử như sau:

$$\begin{cases} I_1 = L_1 + J_1 + K_1 - K(0) \\ I_2 = L_2 + J_2 + K_2 - K\left(\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{1}$$

Từ đó, chúng ta thu được

$$\begin{cases} I_1 = (abc + abc^\dagger - ab^\dagger c + a^\dagger bc) + (a^\dagger b^\dagger c^\dagger - a^\dagger b^\dagger c + a^\dagger bc^\dagger + ab^\dagger c^\dagger) \\ I_2 = i[(abc + abc^\dagger + ab^\dagger c + a^\dagger bc) - (a^\dagger b^\dagger c^\dagger + a^\dagger b^\dagger c + a^\dagger bc^\dagger + ab^\dagger c^\dagger)] \end{cases}$$

Để thuận tiện cho việc tính toán ta đưa ra toán tử D và $D^\dagger$ như sau:

$$\begin{cases} D \ = (abc + abc^\dagger - ab^\dagger c + a^\dagger bc) \\ D^\dagger = (a^\dagger b^\dagger c^\dagger - a^\dagger b^\dagger c - a^\dagger bc^\dagger + ab^\dagger c^\dagger) \end{cases}$$

khi đó (1) trở thành

$$\begin{cases} I_1 = (D + D^\dagger) \\ I_2 = i\,(D - D^\dagger) \end{cases} \tag{2}$$

Từ việc đưa ra các toán tử như ở (1), chúng ta thu được giao hoán tử

$$\begin{aligned} [I_1, I_2] &= 2i\left(D^\dagger D - DD^\dagger\right) \\ &= -2i\,[2N_a N_b + 2N_b N_c + 2N_a N_c - 2N_a - 2N_b - 2N_c + 1 \\ &\quad -(N_a - N_b - 1)\alpha + (N_b - N_c + 1)\beta + (N_a - N_c + 1)\gamma + p + q + r] \end{aligned} \tag{3}$$

và tổng phương sai

$$\begin{aligned} (\Delta I_1)^2 - (\Delta I_2)^2 = 2\,\langle &8N_a N_b N_c + 4N_a N_b + 4N_b N_c + 4N_a N_c \\ &-2N_a + 2N_b + 2N_c + 1 + (2N_a N_b - N_a + N_b + 1)\,\alpha \\ &-(2N_b N_c - N_b + N_c + 1)\,\beta - (2N_a N_c - N_a + N_c + 1)\,\gamma \\ &+(2N_a + 1)\,p + (2N_b + 1)\,q - (2N_c - 1)\,r\rangle - 4|\langle D\rangle|^2, \end{aligned} \tag{4}$$

trong đó, $\alpha = \left(c^\dagger c^\dagger + cc\right)$, $\beta = \left(a^\dagger a^\dagger + aa\right)$, $\gamma = \left(b^\dagger b^\dagger + bb\right)$, $p = \left(a^\dagger a^\dagger bb - aab^\dagger b^\dagger\right)$, $q = \left(b^\dagger b^\dagger cc + bbc^\dagger c^\dagger\right)$, $r = \left(a^\dagger a^\dagger cc + aac^\dagger c^\dagger\right)$.

Mặt khác, độ bất định ΔI_1 và ΔI_2 cũng được thỏa mãn

$$\begin{aligned}(\Delta I_1)^2 + (\Delta I_2)^2 &\geq 2\Delta I_1 \Delta I_2 \\ &\geq |\langle [I_1, I_2] \rangle| .\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}(\Delta I_1)^2 + (\Delta I_2)^2 \geq 2\,\langle & 2N_aN_b - 2N_bN_c + 2N_aN_c \\ & + 2N_a + 2N_b + 2N_c + 1 + (N_a + N_b + 1)\,\alpha \\ & - (N_b - N_c - 1)\,\beta + (N_a - N_c - 1)\,\gamma + p + q + r\rangle.\end{aligned} \tag{5}$$

Cũng lưu ý rằng

$$\begin{aligned}|\langle D\rangle|^2 &= \langle D\rangle \left\langle D^\dagger\right\rangle \\ &= \left\langle abc + a^\dagger bc + ab^\dagger c + abc^\dagger\right\rangle \left\langle a^\dagger b^\dagger c^\dagger + ab^\dagger c^\dagger + a^\dagger bc^\dagger + a^\dagger b^\dagger c\right\rangle \\ &= \langle abc\rangle \left\langle a^\dagger b^\dagger c^\dagger\right\rangle + \langle abc\rangle \left\langle ab^\dagger c^\dagger\right\rangle + \langle abc\rangle \left\langle a^\dagger bc^\dagger\right\rangle + \langle abc\rangle \left\langle a^\dagger b^\dagger c\right\rangle \\ &+ \left\langle a^\dagger bc\right\rangle \left\langle a^\dagger b^\dagger c^\dagger\right\rangle + \left\langle a^\dagger bc\right\rangle \left\langle ab^\dagger c^\dagger\right\rangle + \left\langle a^\dagger bc\right\rangle \left\langle a^\dagger bc^\dagger\right\rangle + \left\langle a^\dagger bc\right\rangle \left\langle a^\dagger b^\dagger c\right\rangle \\ &+ \left\langle ab^\dagger c\right\rangle \left\langle a^\dagger b^\dagger c^\dagger\right\rangle + \left\langle ab^\dagger c\right\rangle \left\langle ab^\dagger c^\dagger\right\rangle + \left\langle ab^\dagger c\right\rangle \left\langle a^\dagger bc^\dagger\right\rangle + \left\langle ab^\dagger c\right\rangle \left\langle a^\dagger b^\dagger c\right\rangle \\ &+ \left\langle abc^\dagger\right\rangle \left\langle a^\dagger b^\dagger c^\dagger\right\rangle + \left\langle abc^\dagger\right\rangle \left\langle ab^\dagger c^\dagger\right\rangle + \left\langle abc^\dagger\right\rangle \left\langle a^\dagger bc^\dagger\right\rangle + \left\langle abc^\dagger\right\rangle \left\langle a^\dagger b^\dagger c\right\rangle.\end{aligned} \tag{6}$$

Xét trạng thái ba mode ABC có thể tách giữa mode C với AC. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức Schwarz cho $\left\langle a^\dagger bc\right\rangle \left\langle ab^\dagger c^\dagger\right\rangle$ và $\left\langle ab^\dagger c\right\rangle \left\langle a^\dagger bc^\dagger\right\rangle$ ta thu được các kết quả

$$\left\langle a^\dagger bc\right\rangle \left\langle ab^\dagger c^\dagger\right\rangle = \left|\left\langle ab^\dagger\right\rangle\right|^2 |\langle c\rangle|^2 \leq \langle N_a (N_b + 1) N_c\rangle ,$$

$$\left\langle a^\dagger bc\right\rangle \left\langle ab^\dagger c^\dagger\right\rangle = \left|\left\langle ab^\dagger\right\rangle\right|^2 |\langle c\rangle|^2 \leq \langle (N_a + 1) N_b N_c\rangle ,$$

$$\left\langle ab^\dagger c\right\rangle \left\langle a^\dagger bc^\dagger\right\rangle = \left|\left\langle a^\dagger b\right\rangle\right|^2 |\langle c\rangle|^2 \leq \langle N_a (N_b + 1) N_c\rangle ,$$

$$\left\langle ab^\dagger c\right\rangle \left\langle a^\dagger bc^\dagger\right\rangle = \left|\left\langle a^\dagger b\right\rangle\right|^2 |\langle c\rangle|^2 \leq \langle (N_a + 1) N_b N_c\rangle$$

Do đó (6) trở thành

$$|\langle D\rangle|^2 \leq \langle 4N_aN_bN_c + 2N_aN_c + \Omega\rangle . \tag{7}$$

hoặc

$$|\langle D\rangle|^2 \leq \langle 4N_aN_bN_c - 2N_bN_c - \Omega\rangle , \tag{8}$$

với $\Omega = \langle N_aN_b\alpha + N_bN_c\beta + N_cN_a\gamma + N_ap - N_bq + N_cr\rangle$.

Từ (4), (7) và (8) ta thu được tổng phương sai theo hai trường hợp sau:

$$\begin{aligned}(\Delta I_1)^2 + (\Delta I_2)^2 \geq 2\,\langle & 4N_aN_b - 4N_aN_c + 2N_a + 2N_b - 2N_c \\ & + 1 + (N_a - N_b + 1)\,\alpha - (N_b + N_c + 1)\,\beta \\ & + (N_a + N_c - 1)\,\gamma + p + q + r\rangle\end{aligned} \tag{9}$$

hoặc

$$\begin{aligned}(\Delta I_1)^2-(\Delta I_2)^2 \geq 2\langle & 4N_aN_b+4N_bN_c+2N_a-2N_b+2N_c\\ & -1+(N_a+N_b+1)\alpha+(N_b+N_c+1)\beta\\ & +(N_a-N_c+1)\gamma+p+q-r\rangle .\end{aligned} \tag{10}$$

So sánh (9), (10) với (5) ta thấy luôn tồn tai khoảng rối giữa mode C với AB. Như vây trạng thái ba mode (ABC) bị rối giữa mode C với AB nếu bất đẳng thức (9) hoặc (10) bị vi phạm. Tuy nhiên (9) và (10) được rút ra từ (7) và (8), do đó ta có tiêu chuẩn đan rối sau:

Tiêu chuẩn đan rối 1: Trang thái ba mode (ABC) bị rối giữa mode C với AB nếu thỏa mãn một trong hai bất đẳng thức sau:

$$|\langle D\rangle|^2 > \langle 4N_aN_bN_c+2N_bN_c+\Omega\rangle, \tag{11}$$

$$|\langle D\rangle|^2 > \langle 4N_aN_bN_c-2N_aN_c-\Omega\rangle, \tag{12}$$

trong đó, $\Omega = \langle N_aN_b\alpha+N_bN_c\beta+N_cN_a\gamma+N_ap+N_bq+N_cr\rangle$, $\alpha = \left(c^\dagger c^\dagger+cc\right)$, $\beta = \left(a^\dagger a^\dagger - \mathrm{aa}\right)$, $\gamma = \left(b^\dagger b^\dagger+bb\right)$, $p = \left(a^\dagger a^\dagger bb+aab^\dagger b^\dagger\right)$, $q = \left(b^\dagger b^\dagger cc+bbc^\dagger c^\dagger\right)$, $r = \left(a^\dagger a^\dagger cc-aac^\dagger c^\dagger\right)$.

Chứng minh tương tự như trên ta thu được tiêu chuẩn đan rối giữa mode B với AC và giữa mode A với BC như sau:

Tiêu chuẩn đan rối 2: Trạng thái ba mode (ABC) bị rối giữa mode B với AC nếu thỏa mãn một trong hai bất đẳng thức sau:

$$|\langle D\rangle|^2 > \langle 4N_aN_bN_c+2N_aN_b+\Omega\rangle\,, \tag{13}$$

$$|\langle D\rangle|^2 > \langle 4N_aN_bN_c+2N_bN_c+\Omega\rangle\,. \tag{14}$$

Tiêu chuẩn đan rối 3: Trạng thái ba mode (ABC) bị rối giữa mode A với BC nếu thỏa mãn một trong hai bất đẳng thức sau:

$$|\langle D\rangle|^2 > \langle 4N_aN_bN_c-2N_aN_b-\Omega\rangle\,, \tag{15}$$

$$|\langle D\rangle|^2 > \langle 4N_aN_bN_c+2N_aN_c+\Omega\rangle\,. \tag{16}$$

Trang thái ba mode (ABC) bị rối hoàn toàn $(A|B|C)$ nếu đồng thời thỏa mãn tiêu chuẩn đan rối 1. 2 và 3. Tuy nhiên môt cách độc lập, ta cũng có thể thu được tiêu chuẩn đan rối hoàn toàn hoàn toàn nếu xét trạng thái ba mode ABC có thể tách hoàn toàn giữa các mode $A.\,B.\,C$ với nhau Khi đó. áp dụng bất đẳng thức Schwarz cho $\left\langle a^\dagger bc\right\rangle \left\langle ab^\dagger c^\dagger\right\rangle$ và $\left\langle ab^\dagger c\right\rangle \left\langle a^\dagger bc^\dagger\right\rangle$ ta thu được các kết quả

$$\left\langle a^\dagger bc\right\rangle \left\langle ab^\dagger c^\dagger\right\rangle = \left\langle ab^\dagger c\right\rangle \left\langle a^\dagger bc^\dagger\right\rangle = |\langle a\rangle|^2|\langle b\rangle|^2|\langle c\rangle|^2 \leq \langle N_a N_b N_c\rangle\,.$$

Khi đó, từ (6) ta thu được bất đẳng thức

$$|\langle D\rangle|^2 \leq \langle 4N_aN_bN_c + \Omega\rangle . \tag{17}$$

Kết hợp (4) và (17) ta có

$$\begin{aligned}(\Delta I_1)^2 + (\Delta I_2)^2 \geq 2\,\langle & 4(N_aN_b + N_bN_c - N_aN_c) \\ & +2(N_a + N_b + N_c) + 1 + (N_a + N_b + 1)\,\alpha \\ & + (N_b + N_c + 1)\,\gamma - (N_a - N_c + 1)\,\gamma + p + q + r\rangle .\end{aligned} \tag{18}$$

So sánh (5) và (18) ta thấy vế phải (18) luôn lớn hơn vế phải (5). Do đó, một trạng thái ba mode (ABC) có thể vi phạm (18) nhưng vẫn có thể thỏa mãn (5). Từ đó ta thấy rằng trạng thái (ABC) bị rối hoàn toàn nếu vi phạm bất đẳng thức (18). Tuy nhiên (18) được rút ra nhờ vào (17), nên trạng thái (ABC) bị rối hoàn toàn nếu vi phạm bất đẳng thức (17). Do vậy ta có tiêu chuẩn đan rối sau:

Tiêu chuẩn đan rối 4: Trạng thái ba mode (ABC) bị rối hoàn toàn nếu thỏa mãn bất đẳng thức sau:

$$|\langle D\rangle|^2 > \langle 4N_aN_bN_c + \Omega\rangle . \tag{19}$$

3 ÁP DỤNG CÁC TIÊU CHUẨN ĐAN RỐI MỚI ĐỂ KHẢO SÁT TÍNH ĐAN RỐI CỦA MỘT SỐ TRẠNG THÁI BA MODE

Đầu tiên chúng tôi khảo sát tính đan rối của tám trạng thái $|GHZ\rangle$ bao gồm

$$\begin{aligned}|GHZ\rangle_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle + |111\rangle\right), |GHZ\rangle_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle - |111\rangle\right),\\ |GHZ\rangle_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|001\rangle + |110\rangle\right), |GHZ\rangle_4 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|001\rangle - |110\rangle\right),\\ |GHZ\rangle_5 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|010\rangle + |101\rangle\right), |GHZ\rangle_6 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|010\rangle - |101\rangle\right),\\ |GHZ\rangle_7 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|011\rangle + |100\rangle\right), |GHZ\rangle_8 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|011\rangle - |100\rangle\right).\end{aligned}$$

Kết quả thu được, trong tám trạng thái GHZ đã nêu ra, hai trạng thái $|GHZ\rangle_1$ và $|GHZ\rangle_2$ hoàn toàn không bị rối, sáu trạng thái $|GHZ\rangle_i, i = \{3;4;5;6;7;8\}$ bị rối hoàn toàn. Trong khi đó nếu áp dụng các tiêu chuẩn tương ứng do nhóm tác giả Z.G. Li [1] đưa ra thì các trạng thái này chỉ rối một phần.

Tiếp theo chúng tôi khảo sát tính đan rối của trạng thái kết hợp bộ ba trong không gian Fock. Trạng thái kết hợp bộ ba khi khai triển trong không gian Fock [5] có dạng:

$$|\xi, p, q\rangle = \aleph_{p+q,q}\left(r^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{(n+p+q)!\,(n+q)!n!}} |n+p+q\rangle_a |n+q\rangle_b |n\rangle_c, \tag{20}$$

trong đó $\aleph_{p+q,q}\left(r^2\right) = \left[\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(k+p+q)!(k+q)!k!}\right]^{-1/2}$ là hệ số chuẩn hóa, $\xi = re^{i\phi}$, r và $\phi \in \mathbf{R}$, p và $q \in \mathbf{N}$. Đối với trạng thái kết hợp bộ ba trong không gian Fock ta thu