

TÍNH DÂY ĐƠN THEO PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Tóm tắt: Bài báo trình bày phương pháp nguyên lý cực trị Gauss áp dụng vào thiết lập và giải bài toán tính kết cấu dây mềm dạng đơn giản chịu tác dụng của lực tập trung và trọng lượng bản thân. Phương pháp tính kết cấu dây trình bày trong bài báo cho phép xác định đồng thời cả lực căng và chuyển vị của dây mà không cần giả thiết trước độ võng của dây như các phương pháp hiện hành.

Abstract: This article presents application of the Gaussian Extreme Principle method to formulate and analysis of simple cable subjected to concentrated load and self-weight load. The presented method allow to determine both internal tension force and displacement of cable without knowing the dip of cable.

NCS. THS. PHÙNG BÁ THẮNG
ĐH Công nghệ GTVT
GS. TSKH HÀ HUY CƯỜNG
Học viện KTQS

ĐẶT VẤN ĐỀ

Tính toán dây đơn là một bài toán cơ bản trong phân tích các kết cấu dây và hệ treo. Trong tính toán, dây được xem là dây mềm chỉ làm việc chịu kéo, bỏ qua khả năng chịu uốn. Tính toán dây đơn hiện nay dựa trên đường cong dây xích do trọng lượng bản thân (the common catenary) có dạng hyperbolic hoặc parabol. Sự khác nhau hai dạng đường cong ở chỗ đường cong dây xích hyperbolic xét trọng lượng dây phân bố đều theo chiều dài dây, còn đường cong dây xích parabol lại xét trọng lượng phân bố đều theo chiều dài nhịp căng dây theo phương ngang. Lực căng trong dây chỉ được xác định khi đã biết trước độ võng lớn nhất của dây.

Trong bài báo này áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để thiết lập hệ phương trình của bài toán tính dây mềm dưới tác dụng tải trọng tập trung

và trọng lượng bản thân dây, cho phép giải được đồng thời chuyển vị và lực căng trong dây.

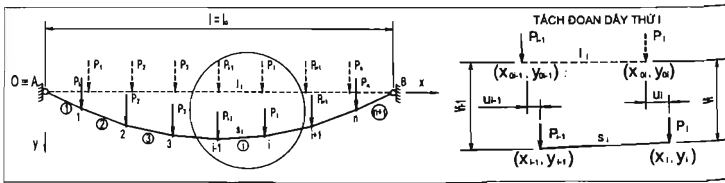
1. Bài toán dây đơn chịu lực tập trung

Xét dây mềm treo cố định qua hai điểm ngang mức A, B và chịu n lực tập trung $P_i (i = 1 + n)$, chiều dài dây l_0 bằng chiều dài nhịp l . Dây có độ cứng chống kéo EA, bỏ qua độ cứng chống uốn EJ của dây (Hình 1).

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc O trùng với A như hình vẽ. Chưa xét đến trọng lượng của dây. Xét đoạn dây thứ i.

Gọi x_0, y_0 là tọa độ ban đầu của điểm đặt lực P_i ; x, y , là tọa độ của điểm đặt lực P , sau khi dây bị biến dạng.

Gọi u, v , là chuyển vị của điểm đặt lực P , thì



Hình 1. Sơ đồ tính dây đơn chịu lực tập trung

$$x_i = x_{0i} + u_i; \quad y_i = v_i, \quad (1)$$

Chiều dài đoạn dây trước khi biến dạng:

$$l_i = x_{0i} - x_{0,i-1} \quad (2)$$

Chiều dài đoạn dây sau khi biến dạng:

$$s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad (3)$$

Biến dạng trong đoạn dây:

$$\varepsilon_i = \frac{s_i - l_i}{l_i} \quad (4)$$

Lực căng trong đoạn dây:

$$N_i = EA\varepsilon_i \quad (5)$$

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng cưỡng bức của bài toán được viết:

$$Z = \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^{l_i} N_i \varepsilon_i dx - \sum_{i=1}^n P_i v_i \rightarrow \min \quad (6)$$

Trong mỗi đoạn dây, lực dọc và biến dạng là không đổi dọc theo chiều dài dây nên được viết lại:

$$Z = \sum_{i=1}^{n+1} N_i \varepsilon_i l_i - \sum_{i=1}^n P_i v_i \rightarrow \min \quad (7)$$

Trong phiếm hàm Z, cần xem biến dạng ε_i độc lập với nội lực N_i ; chuyển vị v_i độc lập với ngoại lực P_i .

Điều kiện cực trị của phiếm hàm Z là $\delta Z = 0$ hay

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^{n+1} N_i l_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_i} = 0; \quad (8)$$

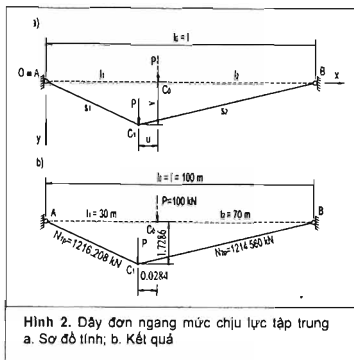
$$\frac{\partial Z}{\partial v_i} = \sum_{i=1}^{n+1} N_i l_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial v_i} - P_i = 0$$

Đây là hệ 2n phương trình phi tuyến với 2n ẩn số u_i, v_i . Để tìm nghiệm của chúng thường dùng các phương pháp giải số đúng dần (lặp) là phương pháp rất phổ biến trong toán và quy hoạch toán (vận trù học). Trong phần mềm Matlab có hàm fsolve cho phép giải hệ các phương trình đại số phi tuyến. Sau khi giải hệ phương trình cho ta các chuyển vị u_i, v_i , tiếp theo sử dụng các biểu thức từ đến sẽ xác định được lực căng trong các đoạn dây.

Ví dụ 1:

Tính chuyển vị và nội lực trong dây đơn có độ cứng $EA=1708000$ kN, treo ở hai gối ngang mức A, B, chiều dài dây bằng chiều dài nhịp $l = l_0 = 100$ m, chịu tác dụng của một lực tập trung $P = 100$ kN đặt cách A khoảng $x_0 = l_1 = 30$ m.

Sơ đồ tính thể hiện trên Hình 2a.



Hình 2. Dây đơn ngang mức chịu lực tập trung
a. Sơ đồ tính; b. Kết quả

Theo biểu thức, hệ phương trình nhận được:

$$\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1708000}{3} \sqrt{900 - 60u + u^2 + v^2} - 1708000 \right) (-60 + 2u)}{\sqrt{900 - 60u + u^2 + v^2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(24400 \sqrt{4900 + 140u + u^2 + v^2} - 1708000 \right) (140 + 2u)}{\sqrt{4900 + 140u + u^2 + v^2}} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\left(\frac{1708000}{3} \sqrt{900 - 60u + u^2 + v^2} - 1708000 \right) v}{\sqrt{900 - 60u + u^2 + v^2}} + \frac{\left(24400 \sqrt{4900 + 140u + u^2 + v^2} - 1708000 \right) v}{\sqrt{4900 + 140u + u^2 + v^2}} - 100 = 0$$

Giải hệ phương trình tìm được chuyển vị u, v , thay vào các biểu thức từ đến tìm được lực căng trong dây. Kết quả thể hiện ở Hình 2b.

Kiểm tra điều kiện cân bằng tại điểm nút, tổng hình chiếu các lực theo các phương x, y :

$$\sum F_x = -0.137 \cdot 10^{-10} \text{ (kN)} \square 0$$

$$\sum F_y = 0.346 \cdot 10^{-11} \text{ (kN)} \square 0$$

Ta thấy điều kiện cân bằng nút được thỏa mãn chứng tỏ kết quả tính nội lực là chính xác.

Ví dụ 2:

Khảo sát sự thay đổi nội lực, chuyển vị khi thay đổi vị trí điểm đặt lực x_0 trong Ví dụ 1.

Kết quả thể hiện ở Bảng 1.

BẢNG 1. Kết quả bài toán dầm đơn khi thay đổi vị trí tải

x0 (m)	10	20	30	40	50
u (m)	0.0428	0.0389	0.0284	0.0149	-0.21e-14
v (m)	0.9809	1.4413	1.7286	1.8899	1.9422
N ₁ (kN)	918.4419	1111.3807	1216.2080	1271.1179	1288.1398
N ₂ (kN)	914.0716	1108.6746	1214.5601	1270.3298	1288.1398
SF _x (kN)	0.97e-10	-0.92e-10	-0.14e-10	0.24e-9	-0.15e-9
SF _y (kN)	-0.1e-10	-0.19e-12	0.35e-11	0.11e-10	0.80e-11

Ta thấy khi đặt lực căng vào phía giữa nhịp thì chuyển vị ngang u càng nhỏ nhưng chuyển vị đứng v, lực căng N trong dầm lại tăng lên.

Khi đặt lực ở giữa (x0 = 50m) thì bài toán là đối xứng, không có chuyển vị ngang. Điều này khẳng định sự tin cậy của lời giải nhận được từ phương pháp đã trình bày.

2. Bài toán dầm đơn chịu tải trọng bản thân

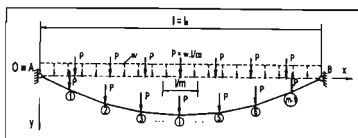
2.1. Phương pháp tính

Xét bài toán dầm đơn, chiều dài dầm bằng chiều dài nhịp, chịu trọng lượng bản thân. Để giải bài toán, ta chia dầm thành các đoạn có chiều dài bằng nhau và quy đổi trọng lượng phân bố trên chiều dài dầm thành các lực tập trung tương đương đặt ở các điểm chia dầm với độ lớn P:

$$P = w \cdot \frac{l}{m} \quad (10)$$

trong đó: l, w, m tương ứng là chiều dài, trọng lượng dầm trên đơn vị dài, số đoạn chia của dầm (Hình 3).

Bằng cách này, bài toán tính dầm chịu tải trọng bản thân được đưa về bài toán dầm chịu nhiều lực tập trung P và áp dụng phương pháp tính dầm chịu lực tập trung để giải. Độ chính xác của lời giải nhận được tùy thuộc vào số đoạn chia dầm.



Hình 3. Tính dầm đơn chịu trọng lượng bản thân

Ví dụ 3:

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm chịu tải trọng lượng bản thân. Chiều dài dầm bằng chiều dài nhịp $l = l_0 = 100\text{m}$, độ cứng kéo nén EA = 1708000 kN, trọng lượng dầm phân bố đều theo chiều dài $w = 5\text{ kN/m}$.

Chia dầm thành 8 đoạn bằng nhau.

Trọng lượng dầm được đưa về các lực tập trung đặt tại nút:

$$P = w \cdot \frac{l}{m} = 62.5\text{ kN}.$$

Kết quả thể hiện trên Hình 4.

Ta thấy lực căng ở sát gối là lớn nhất $N_{\max} = 2602.6578\text{ kN}$, chuyển vị lớn nhất ở giữa nhịp $v_{\max} = 2.4082\text{m}$; kết quả này phù hợp về quy luật như đã nêu trong các tài liệu về kết cấu dầm [4].

Khảo sát với số đoạn chia dầm khác nhau:

Kết quả tính cho các trường hợp với số đoạn chia dầm khác nhau được thể hiện trong Bảng 2.

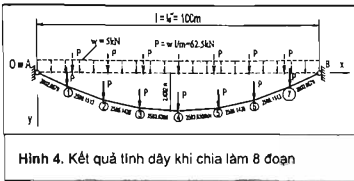
Về logic khi số đoạn chia tăng lên thì kết quả tính sẽ hội tụ về gần với giá trị thực của lực căng và chuyển vị trong dầm. Kết quả trong Bảng 2 cho ta thấy rõ sự hội tụ khi tăng số đoạn chia m trong dầm, sai khác về lực căng và chuyển vị giữa các trường hợp chia dầm khác nhau giảm rất nhanh và hội tụ. Khi số đoạn chia lớn hơn 8 thì sai lệch về kết quả tính lực căng và độ võng lớn nhất là dưới 0.5% nếu tăng gấp đôi số đoạn chia.

BẢNG 2. Kết quả bài toán dầm chịu trọng lượng bản thân với số đoạn chia khác nhau

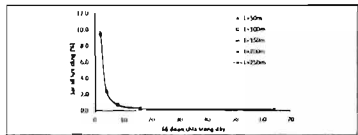
Số đoạn chia m	Lực căng lớn nhất (sát gối)		Chuyển vị lớn nhất (giữa nhịp)	
	Lực căng (kN)	Sai số (%)	Chuyển vị (m)	Sai số (%)
2	2373.5268		2.6369	
4	2558.7770	7.8	2.4477	7.18
8	2602.6578	1.71	2.4082	1.61
16	2614.1569	0.44	2.3987	0.39
32	2617.3907	0.12	2.3963	0.10
64	2618.3848	0.04	2.3958	0.02

2.2. So sánh với lý thuyết tính dầm đơn hiện nay

Xét trường hợp dầm có chiều dài bằng chiều dài nhịp. Hiện nay lý thuyết tính dầm đơn thường dùng



Hình 4. Kết quả tính dây khi chia làm 8 đoạn



Hình 5. Tương quan giữa số đoạn chia trong dây và sai số về lực căng trong dây đơn

đường độ võng của dây dưới tác dụng của trọng lượng bản thân có dạng parabol, khi đó theo diễn giải của Sir Alfred Pugsley [4], lực căng lớn nhất trong dây là ở vị trí hai đầu gối và được tính theo công thức:

$$N_{\max} = \frac{wl^2}{8d} \sqrt{1 + \frac{16d^2}{l^2}} \quad (11)$$

trong đó w là trọng lượng bản thân phân bố đều theo phương ngang, l là chiều dài nhịp, d là độ võng giữa nhịp của dây.

Trong công thức để tính lực căng lớn nhất phải biết độ võng lớn nhất là d . Tác giả dùng d là độ võng giữa nhịp lấy theo kết quả Bảng 2 để đưa vào tính toán. Kết quả so sánh trong Bảng 3

Bảng 3. So sánh với lý thuyết dây hiện nay

Số đoạn chia m	Độ võng giữa nhịp (m)	Lực căng lớn nhất (sắt gối) (kN)		
		Theo pp nguyên lý cực trị Gauss	Theo lý thuyết dây hiện nay	Sai số (%)
2	2.6369	2373.5268	2383.3809	0.41
4	2.4477	2558.7770	2565.6268	0.27
8	2.4082	2602.6578	2607.3126	0.18
16	2.3987	2614.1569	2617.5440	0.13
32	2.3963	2617.3907	2620.1417	0.10
64	2.3958	2618.3846	2620.6836	0.09

Trong Bảng 3, khi tính lực căng lớn nhất theo công thức thì sai khác so với phương pháp nguyên lý cực trị Gauss rất nhỏ (từ 0.09 + 0.41%).

Để tìm được số đoạn chia phù hợp khi tính dây đơn chịu tải trọng bản thân, tác giả đã khảo sát cho các trường hợp chiều dài dây khác nhau, số đoạn chia của dây thay đổi từ 2 đến 64. Khi số đoạn chia lớn hơn 16 thì độ võng lớn nhất hầu như không thay đổi. Đồ thị trong Hình 5 biểu diễn tương quan giữa sai số về lực căng lớn nhất trong dây với số đoạn

chia trong dây cho các trường hợp dây có chiều dài khác nhau, giá trị lực căng lớn nhất tính theo ứng với độ võng d của dây khi chia dây làm 64 đoạn. Theo kết quả khảo sát thì sai khác về lực căng khi tính theo hai phương pháp là dưới 1% nếu chia dây làm 8 đoạn và dưới 0.5% nếu chia dây hơn 16 đoạn

3. KẾT LUẬN

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cho lời giải chính xác về nội lực và chuyển vị của dây dưới tác dụng của tải trọng tập trung và trọng lượng bản thân dây. Khi tính dây chịu tác dụng của trọng lượng bản thân theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss không cần giả thiết trọng lượng dây phân bố đều theo chiều dài nhịp và chỉ cần chia dây thành các đoạn nhỏ với số đoạn chia bằng 8 đã có thể tính được lực căng trong dây với sai số nhỏ hơn 1%.

Khác với lý thuyết tính dây hiện nay, phương pháp nguyên lý cực trị Gauss dùng tính toán dây đơn là tổng quát hơn, đã đưa ra các kết quả tính toán mà không cần cho trước giá trị của độ võng lớn nhất d , đặc biệt cần cho biết chuyển vị ngang là vấn đề khó trong lý thuyết tính toán kết cấu dây.

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

- [1]. Hà Huy Cường, Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, (4/2005).
- [2]. Phùng Bá Thắng, Phương pháp tính kết cấu dàn có xét đến biến dạng dọc trục của thanh, Tạp chí cầu đường (4/2008).
- [3]. Phạm Văn Trung, Phương pháp mới tính hệ kê cấu dây và mái treo, Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội (2006).
- [4]. Sir. Alfred Pugsley, The theory of suspension bridges, Edward Arnold Ltd, London (1957)
- [5]. Walter Podolny Jr and John B. Scalzi, Construction and Design of Cable-Stayed Bridges, United States of America (1986).
- [6]. René Walther, Bernard Houriet, Walmar Isler, Pierre Moïa, Cable stayed bridges, Thomas Telford Ltd, London (1988).