

## CẤP ĐỘ PHÁT HIỆN BẤT BIẾN HÌNH HỌC TRONG QUÁ TRÌNH CHỨNG MINH

Nguyễn Danh Nam\*

Trường ĐH Sư phạm – ĐH Thái Nguyên

### TÓM TẮT

Bài báo phân loại các cấp độ phát hiện bất biến hình học trong quá trình chứng minh với sự hỗ trợ của phần mềm toán học động. Dựa trên các cấp độ này, sinh viên có thể nhận thấy được vai trò của việc phát hiện bất biến trong quá trình tìm lời giải cho một bài toán. Từ đó giúp các em có thể phân biệt được bất biến của các nhóm biến hình khác nhau và biết sử dụng những bất biến phù hợp trong giải các bài toán sơ cấp. Đồng thời, thông qua bất biến hình học, sinh viên bước đầu làm quen với việc xây dựng hình học theo quan điểm biến hình. Đây là quan điểm hiện đại trong việc xây dựng hình học, nó giúp cho việc phân loại các nhóm hình học khác nhau như hình học xạ ảnh, hình học afin, hình học Oclit dựa trên bất biến của mỗi nhóm

**Từ khóa:** Bất biến hình học, nhóm biến hình, cấp độ phát hiện bất biến, quá trình chứng minh, môi trường hình học động

### ĐẶT VẤN ĐỀ

Xây dựng hình học theo quan điểm biến hình được dựa trên ý tưởng gắn hình học với việc nghiên cứu về lý thuyết nhóm được nhà toán học người Đức Felix Klein (1849-1925) khởi xướng từ thế kỉ 19. Ông đã sắp xếp hệ thống các phép biến hình lại thành những nhóm các phép biến hình khác dựa vào các bất biến của mỗi nhóm [2]. Theo đó, một tính chất hình học được khảo sát xem nó có là bất biến qua nhóm các phép biến hình nào đó hay không. Dựa trên các bất biến của mỗi nhóm cùng với các nhóm con của chúng người ta đã sắp xếp hệ thống lại các thứ hình học theo một quan điểm mới và hiện đại [4]. Cụ thể, mối quan hệ giữa các nhóm biến hình được sắp xếp theo quan hệ bao hàm như sau: *nhóm xạ ảnh*  $\supset$  *nhóm afin*  $\supset$  *nhóm đồng dạng*  $\supset$  *nhóm dời hình*. Như vậy, một hình hình học sẽ là phần tử của một lớp tương đương nào đó, ví dụ như hai hình bằng nhau, hai hình đồng dạng với nhau hoặc hai hình là ảnh của nhau qua một phép biến đổi afin hay biến đổi xạ ảnh. Dựa trên bất biến của các nhóm biến hình, chúng ta có thể xác định được bài toán đang xét thuộc hình học của nhóm biến hình nào. Từ đó, có thể đề xuất các phương pháp giải bài toán một cách hợp lý.

**Bảng 1.** Bất biến của các nhóm biến hình

| Nhóm biến hình | Bất biến  |
|----------------|---|
| Nhóm xạ ảnh    | Tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng, hàng điểm điều hoà.                            |
| Nhóm afin      | Tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng, sự thẳng hàng, song song, đồng quy              |
| Nhóm đồng dạng | Tỉ số độ dài đoạn thẳng, sự thẳng hàng, song song, độ lớn của góc.                |
| Nhóm dời hình  | Độ dài đoạn thẳng, sự thẳng hàng, song song, vuông góc, đồng quy, độ lớn của góc. |

Nghiên cứu hình học theo quan điểm biến hình dễ tiếp cận hơn khi các phần mềm hình học động ra đời như: GeoGebra, Cinderella, Geometer's Sketchpad, Cabri Geometry, Autograph, GeoSpacw, ... Các phần mềm này đóng vai trò trong việc minh họa các tính chất hình học là bất biến qua phép biến hình. Ví dụ như *tính chất đồng quy* của ba đường trung tuyến trong tam giác không phụ thuộc vào sự thay đổi hình dạng tam giác là tính chất afin. Trong môi trường hình học động, chúng tôi phân biệt bất biến tĩnh và bất biến động. Bất biến tĩnh là những đại lượng không đổi, cố định. Bất biến động là bất biến của hình có sự thay đổi về vị trí qua một phép biến đổi [1].

\* Tel: 0979446224, Email: danhnam.nguyen@dhsptn.edu.vn

**PHÂN LOẠI CẤP ĐỘ PHÁT HIỆN BẤT BIẾN HÌNH HỌC**

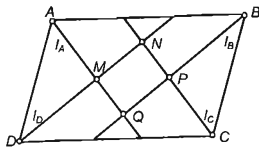
Chúng tôi giao cho nhóm gồm 67 sinh viên 4 bài toán (bài toán 1 đến bài toán 4) và yêu cầu tìm lời giải với sự hỗ trợ của phần mềm hình học động. Sau đó chúng tôi tiến hành quan sát quá trình giải bài toán, ghi lại sự chuyên động của con trỏ, bàn phím và ghi chú. Dựa trên hệ thống câu hỏi (Bảng 2) được thiết kế theo thang bậc của Likert với các cột tương ứng (1 = Rất không đồng ý, 2 = Không đồng ý, 3 = Không có ý kiến, 4 = Đồng ý, 5 = Rất đồng ý), bước đầu chúng tôi đã phân loại các cấp độ phát hiện bất biến hình học. Phân tích số liệu từ bảng 2, một nhóm gồm 5 sinh viên đạt được các mức độ phát hiện bất biến khác nhau đã được chọn để phỏng vấn.

**Bảng 2.** Bảng tự đánh giá cấp độ phát hiện bất biến hình học

| Câu hỏi tự đánh giá |   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------------|---|---|---|---|---|---|
| 1                   | Chi phát hiện được các bất biến mà bài toán đã cho  |   |   |   |   |   |
| 2                   | Phân biệt được các hình bằng nhau hoặc đồng dạng với nhau trong một hình vẽ   |   |   |   |   |   |
| 3                   | Nhận ra các bất biến tịnh   |   |   |   |   |   |
| 4                   | Phân biệt được bất biến của các phép biến hình khác nhau như phép đối xứng, phép tịnh tiến, phép quay   |   |   |   |   |   |
| 5                   | Phát hiện các bất biến đồng trục trong bài toán bằng cách kéo rê chuột, đo đạc và kiểm tra các mối quan hệ với sự hỗ trợ của phần mềm toán học động |   |   |   |   |   |
| 6                   | Phát hiện ảnh của một hình qua một phép biến hình   |   |   |   |   |   |
| 7                   | Phát hiện ra các bất biến đồng trục mà không cần sự hỗ trợ của phần mềm toán học động   |   |   |   |   |   |
| 8                   | Phát hiện sự tồn tại của các phép biến hình mà không cần sự hỗ trợ của phần mềm toán học động   |   |   |   |   |   |
| 9                   | Phân biệt được bất biến của các loại hình học khác nhau như hình học xạ ảnh, hình học afin, hay hình học Euclit                                     |   |   |   |   |   |

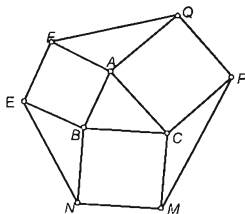
**Bài toán 1.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Các đường phân giác các góc  $A, B, C$  và  $D$  cắt

nhau tạo thành tứ giác  $MNPQ$ . Hãy xác định hình dạng tứ giác  $MNPQ$ ?



**Hình 1.** Trước khi phát hiện bất biến

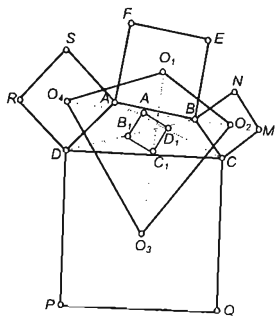
**Bài toán 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Dựng các hình vuông  $ABEF, BCMN, ACPQ$  ra phía ngoài tam giác  $ABC$ . Hãy so sánh diện tích của bốn tam giác  $ABC, BNE, CMP$  và  $AFQ$ .



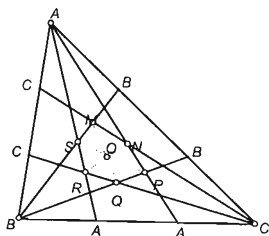
**Hình 2.** Trước khi phát hiện bất biến

**Bài toán 3.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Dựng ra phía ngoài tứ giác này bốn hình vuông  $ADEF, BCMN, CDPQ$  và  $ADRS$ . Gọi  $O_1, O_2, O_3, O_4$  lần lượt là tâm bốn hình vuông trên. Chứng minh rằng trung điểm của các đường chéo của hai tứ giác  $ABCD$  và  $O_1O_2O_3O_4$  tạo thành một hình vuông.

**Bài toán 4.** Cho tam giác  $ABC$ . Lấy sáu điểm  $A_1, A_2 \in BC; B_1, B_2 \in CA; C_1, C_2 \in AB$  sao cho  $BA_1 = A_1A_2 = A_2C, CB_1 = B_1B_2 = B_2A, AC_1 = C_1C_2 = C_2B$ . Sáu đường thẳng  $AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2$  cắt nhau tạo thành hình lục giác  $MNPQRS$ . Chứng minh rằng ba đường chéo của hình lục giác này đồng quy.



Hình 3. Trước khi phát hiện bất biến



Hình 4. Trước khi phát hiện bất biến

Dựa trên lời giải các bài toán kết hợp với phỏng vấn chúng tôi có được kết quả sau:

**Cấp độ 0.** Không phát hiện được các bất biến hình học

SV1 vẽ hình nhưng không thể nhận ra bất biến hình học nào, thậm chí các bất biến đã cho hoặc các bất biến tĩnh (ví dụ như các tính chất của hình bình hành như trong bài toán 1) bởi vì SV này không nhớ các tính chất của hình bình hành. Do vậy, SV1 kết luận rằng tứ

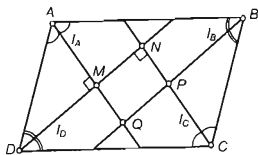
giác là hình vuông mà không giải thích gì. Trong bài toán 2, SV1 cũng không nhận ra diện tích của bốn tam giác bằng nhau mặc dù được sử dụng phần mềm hình học động để tương tác với các hình. Tất nhiên, SV1 cũng không giải được các bài toán khác. Chúng tôi kết luận rằng SV1 đạt cấp độ 0 trong phát hiện bất biến hình học.

**Cấp độ 1.** Phát hiện được các bất biến tĩnh

Trước khi thao tác với các hình động, SV2 đã nhận ra một số bất biến tĩnh như:  $AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $\angle A = \angle C$ ,  $\angle B = \angle D$  và  $\angle A + \angle D = \angle B + \angle C = 180^\circ$ . Sau đó, SV2 kéo rê các đỉnh của hình bình hành và nhận ra tứ giác  $MNPQ$  là hình chữ nhật. SV2 đã kiểm tra lại giả thuyết trên bằng cách đo độ lớn góc  $M$  và góc  $N$ . Từ đó, SV2 sử dụng lập luận sau:

$$\begin{aligned} \angle M &= 180^\circ - (\angle ADM + \angle DAM) \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle N &= 180^\circ - (\angle CDN + \angle DCN) \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

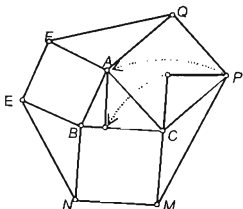


Hình 5. Sau khi phát hiện bất biến

Rõ ràng, khả năng phát hiện ra các bất biến tĩnh giúp SV2 dễ dàng giải bài toán 1. Tuy nhiên, ở bài toán 2, SV2 chỉ nhận ra được diện tích của bốn tam giác bằng nhau và nhận ra được đẳng thức  $BC = CM$ , nhưng không thể phát hiện ra bất biến  $AH = PI$  hoặc  $\angle AHC = \angle PIC$ . SV2 không thể phát hiện ra các bất biến động này và vì vậy không thể giải được bài toán 3 và 4. Chúng tôi kết luận SV2 đạt cấp độ 1 trong phát hiện bất biến hình học.

**Cấp độ 2. Phát hiện được các bất biến động**

SV3 vẽ hình và kéo rê các đỉnh của tam giác  $ABC$ . SV3 tìm các bất biến và suy đoán rằng diện tích của các tam giác là bằng nhau. Sau đó, SV3 kiểm tra dự đoán trên bằng cách sử dụng phần mềm hình học động để đo diện tích các tam giác. Đồng thời SV3 cũng nhận ra được  $BC = CM$  và cân phải chỉ ra  $AH = PI$  để có thể kết luận diện tích của tam giác  $ABC$  bằng diện tích của tam giác  $CMP$ . Từ đó, SV3 phát hiện ra bất biến động sau:  $\Delta ACH$  luôn bằng  $\Delta PCI$ . Hơn nữa, SV3 cũng nhận ra rằng  $\Delta ACH$  là ảnh của  $\Delta PCI$  qua phép quay tâm  $C$ , góc quay  $90^\circ$  nhưng không thể chứng minh được điều này. Điều đó có nghĩa là SV3 đã nhận ra được bất biến nhưng không thể chứng minh được.



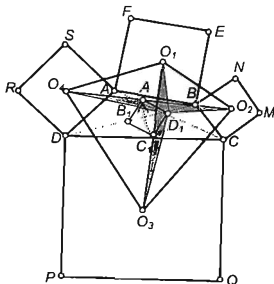
Hình 6. Sau khi phát hiện bất biến

Tương tự tình huống ở bài toán 3, SV3 phát hiện ra bất biến  $D_1O_2 = D_1O_1$ ,  $D_1O_4 = D_1O_3$  và  $\Delta D_1O_3O_1 = \Delta D_1O_3O_2$  nhưng không thể chỉ ra rằng tồn tại phép quay tâm  $D_1$ , góc quay  $90^\circ$  bảo toàn hình dạng của các tam giác này. Chúng tôi kết luận rằng SV3 không thể nhận ra phép biến hình nào bảo toàn bất biến đó và không xác định được sự tồn tại của phép biến hình trong bài toán. Do vậy, SV3 đạt được cấp độ 2 trong phát hiện bất biến hình học.

**Cấp độ 3. Phát hiện được phép biến hình bảo toàn bất biến hình học**

Trong bài toán 2, SV4 chỉ ra được rằng  $Q_C^{90^\circ}(\Delta PIC) = \Delta ACH \Rightarrow AH = PI \Rightarrow$  diện

tích của tam giác  $ABC$  bằng diện tích của tam giác  $PCM$ . Tương tự, SV4 chứng minh được các trường hợp khác. Trong bài toán 3, SV4 bắt đầu tìm hướng giải bằng việc thêm một số hình phụ, đo độ dài một số đoạn thẳng. SV4 sử dụng phép quay  $Q_B^{90^\circ}(A) = E$ ,  $Q_B^{90^\circ}(N) = C$  và tìm ra bất biến  $AN \perp CE$  và suy ra  $D_1O_2 \perp D_1O_1$ . Điều này có nghĩa là đã chỉ ra được  $Q_{D_2}^{50^\circ}(O_1) = O_2$ . Tương tự, SV4 chứng minh được  $Q_{D_2}^{90^\circ}(O_3) = O_4$ .



Hình 7. Sau khi phát hiện bất biến

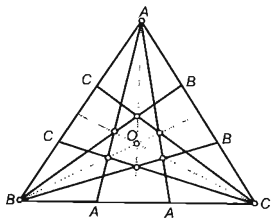
Trong quá trình phân tích, SV4 không thể giải thích lập luận của mình bằng chữ và nhận ra phép quay

$$Q_{D_2}^{90^\circ}(\Delta D_1O_3O_1) = \Delta D_1O_4O_2 \Rightarrow Q_{D_1}^{90^\circ}(C_1) = A_1(1)$$

và  $Q_{D_2}^{90^\circ}(A_1) = C_1(2)$ . Từ (1) và (2) SV4 kết luận rằng tứ giác  $A_1B_1C_1D_1$  là hình vuông. Tuy nhiên, trong bài toán 4, SV4 không thể nhận ra được các tính chất afin. Vì vậy, SV4 cố gắng chứng minh cho tam giác  $ABC$  bất kì nhưng đã thất bại. Điều đó có nghĩa là SV4 không thể nhận ra bất biến của hình học afin. Chúng tôi nói rằng SV4 chỉ đạt cấp độ 3 trong phát hiện bất biến hình học.

**Cấp độ 4. Phát hiện được bất biến của các loại hình học khác nhau**

Trong bài toán 4, SV5 kéo rờ các đỉnh của tam giác  $ABC$  và tập trung quan sát hình lục giác. SV5 nhận ra rằng cho dù hình dạng của tam giác  $ABC$  có thay đổi như thế nào thì các đường chéo của hình lục giác vẫn đồng quy. Từ đó, SV5 nhận ra rằng tính đồng quy của các đường chéo này là một tính chất afin. Do đó, sinh viên đã sử dụng tương đương afin để giải bài toán này. Điều đó có nghĩa là bài toán có thể được chứng minh trong hình học Oclit đối với trường hợp tam giác  $ABC$  đều.



**Hình 8.** Sau khi phát hiện bất biến

Từ đó, SV5 giả sử rằng tam giác  $ABC$  là tam giác đều. Trước tiên, ta có  $\angle BB_1C = \angle CC_1B$  và  $\angle BB_1C = \angle CC_1B \Rightarrow \angle QBC = \angle QCB$ ,  $\angle MBC = \angle MCB \Rightarrow QB = QC$ ,  $MB = MC \Rightarrow Q, M$  nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$ . Tương tự, SV5 chứng minh được rằng các điểm  $R, N$  và  $P, S$  lần lượt nằm trên các đường trung trực của các đoạn thẳng  $AC, AB$ . Từ đó, SV5 kết luận rằng  $MQ, NR, PS$  đồng quy tại điểm  $O$ . Trong bài toán này, SV5 đã chứng minh trường hợp đặc biệt trong hình học Oclit và suy ra trường hợp tổng quát trong không gian afin. Chúng tôi kết luận

rằng SV5 đạt được cấp độ 5 trong phát hiện bất biến hình học.

### KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

Bảng 2 nhằm phân loại các cấp độ phát hiện bất biến của các loại hình học khác nhau (hình học Oclit và hình học afin) trong môi trường hình học động. Chúng tôi nhận thấy rằng, các bất biến sau đây của các phép biến hình có thể được phát hiện với sự hỗ trợ của các phần mềm hình học động: *tính bảo toàn độ dài đoạn thẳng, độ lớn góc, các hình bằng nhau, sự thẳng hàng, tính song song, vuông góc, đồng quy, tỉ số độ dài đoạn thẳng*.

Bảng 3 chỉ ra kết quả trả lời bảng câu hỏi đã được phân loại theo 5 cấp độ phát hiện bất biến hình học. Một số ít SV chỉ đạt cấp độ 1 (câu hỏi 1, 2, 3). Hầu hết các SV đạt cấp độ 2, có nghĩa là chỉ nhận ra được các bất biến tĩnh và có thể phát hiện một số bất biến động với sự hỗ trợ của phần mềm hình học động. Bảng trên cũng chỉ ra rằng các SV đạt được cấp độ 4 (câu hỏi 9) nhưng chưa chắc đã có đánh giá cao ở cấp độ 3 (câu hỏi 6, 7, 8). Đây là khó khăn của SV trong quá trình chứng minh hình học, SV gặp hạn chế trong quá trình chuyển những ý tưởng, hình ảnh trong đầu thành lời viết cho chứng minh bằng suy diễn. Do vậy có thể nói, mối quan hệ giữa các cấp độ này không nhất thiết là quan hệ thứ bậc. Hệ số tương quan giữa các câu hỏi tương đối cao, đặc biệt là câu hỏi 8 và câu hỏi 9. Điều này chỉ ra rằng các SV có thể phát hiện ra các phép biến đổi hình học dựa vào các thao tác trí tuệ, dựa vào sự tương tượng, phân tích hình ảnh trong đầu thì họ đồng thời cũng có khả năng phát hiện ra các bất biến thuộc các loại hình học khác nhau tốt hơn (hệ số tương quan  $\alpha = 0.854$ ).

**Bảng 3.** Kết quả khảo sát câu hỏi ở Bảng 2

| Câu hỏi         | 1    | 2    | 3    | 4    | 5     | 6    | 7    | 8    | 9    |
|-----------------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|
| Điểm trung bình | 4.14 | 3.46 | 3.31 | 3.58 | 3.86  | 3.17 | 2.31 | 2.19 | 3.17 |
| Phương sai      | .714 | .628 | .719 | .920 | 1.046 | .890 | .908 | .926 | 1.12 |

Chúng tôi cũng nhận thấy rằng nếu SV nhận ra các bất biến động (cấp độ 2) thì họ cũng dễ dàng hơn trong việc phát hiện ra các phép biến đổi hình học (cấp độ 3) (hệ số tương quan  $\alpha = 0.835$ ). Kết quả cũng cho thấy các SV đạt được cấp độ phát hiện bất biến hình học cao thì có thể dễ dàng hoàn thành lời giải 4 bài toán dễ dàng hơn (hệ số tương quan  $\alpha > 0.8$ ). Sử dụng kiểm nghiệm Wilcoxon cho các nhóm sinh viên tham gia vào nghiên cứu này, chúng tôi kết luận rằng cấp độ phát hiện bất biến hình học của nhóm đã tăng lên đáng kể sau khi nhóm được làm quen với phương pháp tìm lời giải của bài toán với sự hỗ trợ của các phần mềm hình học động, dưới đây là kết quả kiểm nghiệm của một số câu hỏi tự đánh giá trong bảng 2: câu hỏi 3 ( $Z = -5.000$ ,  $N = 67$ ,  $p < 0.01$ ); câu hỏi 6 ( $Z = -5.892$ ,  $N = 67$ ,  $p < 0.01$ ); câu hỏi 7 ( $Z = -5.425$ ,  $N = 67$ ,  $p < 0.01$ ) và câu hỏi 8 ( $Z = -3.800$ ,  $N = 67$ ,  $p < 0.01$ ).

#### KẾT LUẬN

Nghiên cứu đã phân loại các cấp độ phát hiện bất biến hình học trong quá trình chứng minh bài toán. Với sự hỗ trợ của các phần mềm hình học động, việc phát hiện các bất biến của các loại hình học khác nhau trở nên dễ dàng hơn, đồng thời những bất biến phát hiện được

giúp SV có thể thu thập thêm dữ kiện, hình thành các giả thuyết, nảy sinh ý tưởng chứng minh, kết nối những lập luận logic và viết lời giải bài toán bằng chứng minh suy diễn. Kết quả nghiên cứu cũng cho thấy, môi trường hình học động có khả năng giúp SV nâng cao cấp độ phát hiện bất biến hình học từ cấp độ 1 đến cấp độ 3 (hoặc 4). Ở cấp độ cao, SV thậm chí không cần sự hỗ trợ của phần mềm hình học động vẫn có thể phát hiện ra các bất biến hình học phục vụ cho quá trình chứng minh bài toán hình học.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Danh Nam Nguyen (2011), *The role of abduction in realizing geometric invariants*, In A. Méndez-Vilas (Ed.), *Education in a technological world: communicating current and emerging research and technological efforts*, Formatex Research Center. Spain.
- [2] Nguyễn Mộng Hy (2004). *Các phép biến hình trong mặt phẳng*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.
- [3]. Sue Johnston-Wilder, John Mason (2005). *Developing thinking in geometry*, A SAGE Publications Company, London, England.
- [4]. Marcus Giaquinto (2007). *Visual thinking in mathematics – An epistemological study*, Oxford University Press

#### SUMMARY

#### LEVEL OF REALIZING GEOMETRIC INVARIANTS IN PROVING PROCESS

Nguyễn Danh Nam\*

College of Education – TNU

This paper provides a framework aimed to classify level of realizing geometric invariants in proving process with the support of dynamic geometry environment. Based on these levels, we lay emphasis on the role of realizing geometric invariants in finding the strategies to solve a problem. In particular, students have better understanding of transformation groups while they are working with geometric invariants of different geometries. As a result, they can use appropriate realized invariants in order to collect the data, formulate the conjecture, produce arguments, combine the arguments and write a formal proof.

**Key words:** *Geometric invariant, transformation groups, level of realizing invariant, proving process, dynamic geometry environment.*

Ngày nhận bài: 13/3/2014; Ngày phản biện: 15/3/2014; Ngày duyệt đăng: 25/3/2014

**Phân biên khoa học:** TS. Trần Việt Cường – Trường ĐH Sư phạm – ĐH Thái Nguyên

\* Tel: 0979446224. Email: danhnam.nguyen@dhsptn.edu.vn