

VAI TRÒ CỦA BIỂU DIỄN BỘI TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN

Nguyễn Danh Nam

Khoa Toán, Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Tóm tắt. Bài báo trình bày về vai trò của lý thuyết đa trí tuệ và biểu diễn bội trong dạy học môn toán ở trường phổ thông. Sử dụng các dạng biểu diễn khác nhau giúp học sinh (HS) tiếp cận các khái niệm toán học bằng nhiều phương pháp khác nhau. Từ đó, giúp các em hiểu sâu bản chất của các khái niệm này và biết cách lựa chọn phương pháp biểu diễn tốt nhất để sử dụng trong giải toán. Đặc biệt, với sự hỗ trợ của phần mềm toán học động, biểu diễn bội góp phần hình thành mối liên hệ giữa hình học - đại số và phát triển tư duy linh hoạt cho HS trong giải quyết các vấn đề khác nhau.

Từ khóa: Biểu diễn bội, đa trí tuệ, khái niệm toán học, quan hệ toán học.

1. Mở đầu

Dựa trên sự phân loại về các dạng trí thông minh của Howard Gardner [4], các nhà giáo dục học đã vận dụng lý thuyết này trong đổi mới phương pháp dạy học theo quan điểm mỗi HS thường tiếp cận một vấn đề theo các cách khác nhau và mỗi dạng biểu diễn trong toán học đều có những ưu điểm riêng của nó. Do vậy, vận dụng biểu diễn bội trong dạy học một khái niệm hay tình huống toán học sẽ giúp HS rèn luyện năng lực tư duy linh hoạt cũng như thông hiểu bản chất khái niệm hay tình huống toán học đó (Duval, 2002). Vì thế, trong giảng dạy toán học giáo viên cần kết hợp sử dụng nhiều loại biểu diễn khác nhau để kích thích tư duy của HS: chữ viết, đồ thị (đang động và tĩnh), bảng biểu, biểu đồ, sơ đồ, kí hiệu, công thức, thuật toán, ngôn ngữ, hình ảnh thực tế, video, ... [1, 3, 5].

Trong thực tế dạy học hiện nay, các phần mềm dạy học (đặc biệt là phần mềm toán học động) có thể tạo ra các hình thức biểu diễn khác nhau được hiển thị đồng thời trên màn hình máy vi tính. Điều này giúp cho HS có thể so sánh, đối chiếu và lựa chọn dạng biểu diễn tốt nhất. Từ đó, giúp các em định hướng giải quyết vấn đề một cách tối ưu.

Ngày nhận bài: 15/8/2012. Ngày nhận đăng: 15/9/2013.

Liên hệ, Nguyễn Danh Nam, e-mail: danhnam.nguyen@dhsptn.edu.vn

Theo NCTM (2000), sử dụng biểu diễn bội để: Mô tả các ý tưởng toán học dưới các hình thức khác nhau; Lựa chọn, sử dụng và phiên dịch các cách biểu diễn toán học để giải quyết vấn đề; Mô hình hóa các hiện tượng toán học trong thực tiễn. Hơn nữa, Dreyfus và Eisenberg (1996) cho rằng sự linh hoạt trong phiên dịch và chuyển đổi giữa các dạng biểu diễn bội khác nhau là dấu hiệu của sự thành thạo trong tư duy toán học, kỹ năng giải quyết vấn đề và thông hiểu các khái niệm toán học. Sự linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải quyết vấn đề còn được thể hiện ở năng lực sáng tạo trong sử dụng ngôn ngữ, kí hiệu, minh họa hình ảnh trực quan khi giải toán [2, 4].

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Biểu diễn bội mô tả các khái niệm toán học

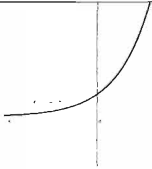
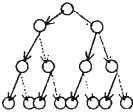
Các nghiên cứu thực nghiệm đều khẳng định rằng quá trình thông hiểu các khái niệm và quan hệ toán học phụ thuộc vào khả năng biểu diễn các khái niệm và quan hệ đó dưới nhiều dạng khác nhau như đồ thị, phương trình, bảng, biểu đồ, kí hiệu, công thức, ngôn ngữ... (Kaput, 1989; Sfard, 1992; Yerushalmy, 1997; Goldin, 1998; Reading, 1999; NCTM, 2000; Porzio, 1999). Ví dụ như một hàm số bậc nhất có thể xem như một tập hợp các cặp sắp thứ tự, một tương ứng trong bảng hay một ảnh xạ, đồ thị, biểu thức đại số. Tương tự, khái niệm miền giá trị của một hàm số có thể được biểu diễn qua dạng đồ thị, bảng các giá trị tương ứng hoặc dạng biểu thức đại số của hàm số đó. Mayer & Hegarty (1996) cho rằng, quá trình dạy học toán sử dụng biểu diễn bội gồm 4 giai đoạn: sử dụng biểu diễn đơn, sử dụng biểu diễn bội, tạo mối liên hệ giữa các loại biểu diễn, tích hợp và chuyển đổi linh hoạt giữa các loại biểu diễn [2, 4, 7].

2.1.1. Khái niệm hàm số

Piez và Voxman (1997) cho rằng HS sẽ hiểu sâu hơn khái niệm hàm số nếu các em được tiếp cận thông qua các phương pháp đại số, phương pháp giải tích hay sử dụng đồ thị minh họa. Vì thế, các dạng biểu diễn khác nhau sẽ giúp HS hiểu rõ được bản chất vấn đề, đồng thời rèn luyện cho các em cách nhìn linh hoạt trong các tình huống và phát hiện ra các mối quan hệ được trình bày theo các quan điểm khác nhau (NCTM, 2000). Đặc biệt, kiểu biểu diễn bội song song đóng vai trò quan trọng trong các hoạt động nhận dạng và thể hiện các khái niệm toán học.

Ví dụ 1. Hãy liệt kê các dạng biểu diễn khác nhau của hàm số $y = 2^x$ và nêu mối quan hệ giữa chúng. Kết quả dưới đây cho thấy các dạng biểu diễn khác nhau của hàm số trên.

Thông qua ví dụ này, giáo viên rèn luyện cho HS các thao tác phiên dịch và chuyển đổi giữa các biểu diễn khác nhau của hàm số $y = 2^x$ như dạng đồ thị, dạng hình học, dạng kí hiệu và dạng bảng. Từ đó giúp HS thấy được ý nghĩa của từng dạng biểu diễn trong việc đề xuất các phương pháp giải các dạng bài toán khác nhau như phương pháp đồ thị.

Dạng đồ thị	Dạng hình học	Kí hiệu	Dạng bảng														
		$f(x) = 2^x$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>2^x</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>32</td> </tr> </tbody> </table>	x	2 ^x	0	1	1	2	2	4	3	8	4	16	5	32
x	2 ^x																
0	1																
1	2																
2	4																
3	8																
4	16																
5	32																

Hình 1. Các dạng biểu diễn khác nhau của hàm số $y = 2^x$

phương pháp đại số hay phương pháp thống kê toán học.

Ngoài ra, với chức năng biểu diễn bội của các phần mềm toán học đồng, giáo viên có thể dễ dàng tổ chức hoạt động nhóm dưới đây nhằm rèn luyện kỹ năng phiên dịch và chuyển đổi giữa ba dạng biểu diễn hàm số thường gặp. Đó là dạng đồ thị, dạng đại số (phương trình tổng quát) và dạng bảng.

Ví dụ 2. (Hoạt động nhóm) Hãy xác định dạng hàm số biểu diễn các dãy điểm đã cho trong bảng tính dưới đây (cột A: giá trị biến số x ; cột B: giá trị tương ứng của hàm số $f(x)$; cột C: giá trị tương ứng của hàm số $g(x)$).

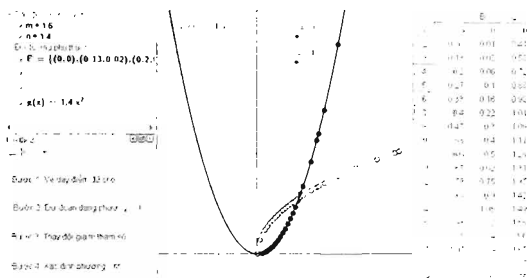
Hoạt động. Giáo viên yêu cầu các nhóm HS sử dụng phần mềm toán học động GeoGebra nhập tọa độ các điểm trong dãy $(x, f(x))$ và $(x, g(x))$. Sau đó thực hiện lệnh vẽ dãy điểm và dự đoán về dạng hàm số có đồ thị chứa các dãy điểm trên. Sau khi dự đoán, giáo viên hướng dẫn nhóm HS nhập các tham số m và n của các hàm số có dạng $f(x) = m\sqrt{x}$ và $g(x) = nx^2$. Thay đổi giá trị của các tham số cho đến khi đồ thị của các hàm số chứa hoàn toàn các dãy điểm nói trên. Yêu cầu các nhóm trình bày báo cáo và so sánh với kết quả của nhóm mình.

Qua ví dụ trên, HS được làm quen với các hoạt động phiên dịch và chuyển đổi giữa các dạng biểu diễn khác nhau của các hàm số $y = 1.6\sqrt{x}$ và $y = 1.4x^2$. Điều này giúp HS nắm được khái niệm cũng như các tính chất của hàm số bậc hai và hàm số căn bậc hai của x . Đặc biệt, các thao tác trên giúp HS nhận dạng và vẽ đồ thị của các hàm số này khi biết chúng đi qua các điểm cho trước.

2.1.2. Khái niệm giới hạn của dãy số

Ví dụ 3. Minh họa khái niệm giới hạn của dãy số $u_n = \frac{1}{n+3}$ bằng các dạng biểu diễn khác nhau như bảng biểu và hình ảnh trên trục số hoặc hệ trục tọa độ.

Hoạt động. Trước tiên, giáo viên hướng dẫn học sinh lập bảng giá trị của các số hạng tương ứng của dãy số. Với n càng lớn, hãy nhận xét về giá trị của số hạng u_n của dãy, u_n dần tới số nào?

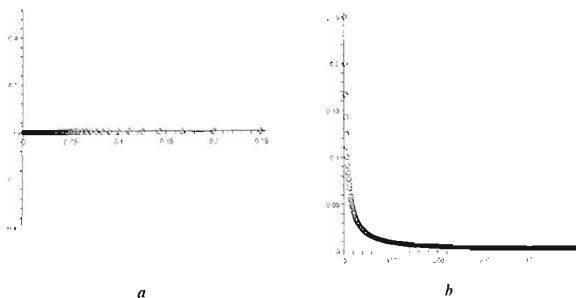


Hình 2. Xác định dạng hàm số chứa dãy điểm cho trước

Bảng 1. Giá trị các số hạng của dãy số u_n

n	1	2	3	4	5	6	...	500	..
$\frac{1}{(n+3)}$	0.25	0.2	0.1667	0.1428	0.125	0.1111	...	0.002	...

Giáo viên tiếp tục minh họa bằng hình ảnh của dãy số trên trục số (xem Hình 3b) Nhìn vào hình ảnh các số hạng trên trục số, HS cần rút ra nhận xét là có rất nhiều số hạng của dãy số tập trung (phân bố) gần điểm 0, càng gần điểm 0 thì các số hạng càng gần nhau hơn.

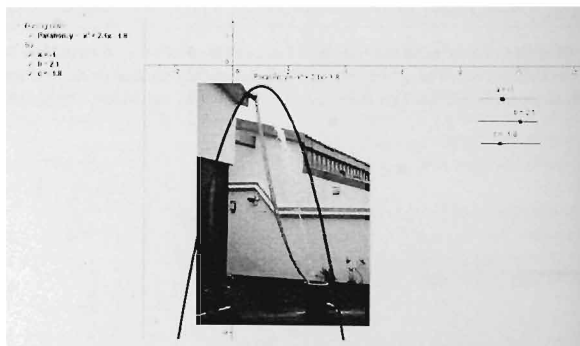


Hình 3. Hình ảnh của dãy số có giới hạn bằng 0

Trên hệ trục tọa độ, giáo viên tiếp tục minh họa hình ảnh của dãy số này và hướng dẫn HS rút ra nhận xét là khi n càng lớn thì các số hạng của dãy u_n càng tiến sát trục hoành, tức giá trị của các số hạng này dần tới 0. Như vậy, kết hợp với định nghĩa bằng lời, giáo viên cần sử dụng biểu diễn bồi (bảng, hình ảnh) để giúp học sinh hiểu rõ bản chất của một dãy số có giới hạn dần tới 0.

2.2. Biểu diễn bồi hình thành mối liên hệ giữa hình học và đại số

Hiểu được mối liên hệ giữa hình học và đại số giúp HS dễ dàng chuyển từ tiếp cận các đối tượng hình học bằng phương pháp tổng hợp sang phương pháp tọa độ. Phương pháp này là công cụ để nghiên cứu hình học theo quan điểm hiện đại và cũng góp phần bồi dưỡng cho HS khả năng suy luận, khái quát và tư duy trừu tượng. Trong biểu diễn bồi liên kết và tích hợp, mỗi dạng biểu diễn đều nhấn mạnh đến các khía cạnh khác nhau của cùng một khái niệm hay đối tượng toán học. Kỹ năng phiên dịch và chuyển đổi giữa các dạng bằng biểu, phương trình và đồ thị của hàm số tạo điều kiện cho HS hiểu được mối liên hệ tương ứng giữa số học, đại số và hình học (Davis, 1987). Hơn nữa, giáo viên có thể sử dụng biểu diễn thực tế tích hợp với biểu diễn dạng bảng, dạng đồ thị và dạng đại số của hàm số để tổ chức các hoạt động mô hình hóa các hiện tượng thực tiễn trong dạy học toán ở trường phổ thông (NCTM, 2000).



Hình 4. Parabol biểu diễn quỹ đạo rơi của nước mưa

Các nghiên cứu cho thấy, sử dụng biểu diễn bồi giúp học sinh giải các bài toán hình học và đại số tốt hơn (Bidwell & Clason, 1970). Dienes's (1960) cho rằng các khái niệm và quan hệ toán học được mô tả dưới nhiều dạng khác nhau sẽ giúp học sinh nắm được bản chất trừu tượng của toán học, tối ưu hóa việc học tập toán của học sinh. Driscoll (1999)

cho rằng quá trình phiên dịch trôi chảy giữa các dạng biểu diễn của khái niệm toán học với nhau sẽ phát triển sự thông hiểu [6].

Ví dụ 4. (Hoạt động nhóm) Sử dụng phần mềm toán học động, hãy xác định phương trình biểu diễn quỹ đạo rơi của nước mưa từ mái nhà cháy xuống (xem Hình 4).

Hoạt động. Giáo viên yêu cầu các nhóm HS tạo các thanh trượt biểu diễn các hệ số a, b, c của parabol có dạng tổng quát $y = ax^2 + bx + c$. Kéo thanh trượt để thay đổi các hệ số trên sao cho quỹ đạo rơi của nước mưa trùng với một nhánh của parabol. Nhóm HS cần hiểu được các phép biến đổi đồ thị (phép tịnh tiến, phép co giãn) tương ứng với sự thay đổi của các hệ số a, b, c để xác định phương trình parabol chứa đường biểu diễn quỹ đạo rơi của nước mưa. Qua đó, giáo viên giúp HS thấy được quỹ đạo chuyển động của vòi phun nước là đường parabol.

2.3. Biểu diễn bội mô tả quá trình mô hình hóa

Bảng biểu, biểu đồ, đồ thị, ... chính là những mô hình toán học biểu diễn các số liệu thực tế và dự đoán xu hướng phân bố số liệu về các sự vật hiện tượng nào đó. Do đó, thông qua quá trình mô hình hóa, giáo viên cần giúp cho HS mô hình hóa các số liệu rất gần gũi trong cuộc sống như mức thu nhập của từng gia đình trong một tháng ở một khu phố, do chiều cao của các HS trong một lớp học, tính điểm số trung bình của các HS trong lớp, ... Sau khi biểu diễn số liệu (biểu diễn bội) bằng các mô hình tương ứng, giáo viên hướng dẫn HS cách đọc và hiểu ý nghĩa của những mô hình này, đồng thời có phương án điều chỉnh mô hình nếu cần thiết.

Ví dụ 5. Sử dụng biểu diễn bội minh họa các mô hình về mối tương quan giữa điểm số trên lớp và thời gian học tập ở nhà của mỗi HS. Từ đó, rút ra những kết luận cần thiết.

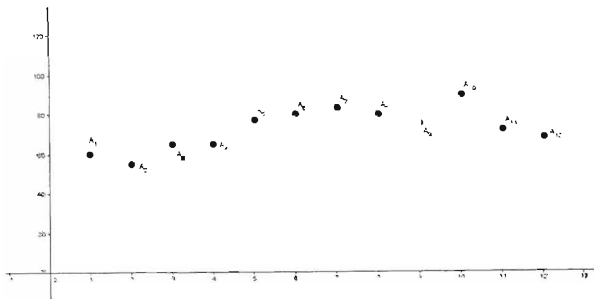
Bảng 2. Bảng thống kê điểm số và thời gian học ở nhà của HS

Thời gian	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Điểm số	60	55	65	65	77	80	83	80	75	90	72	68

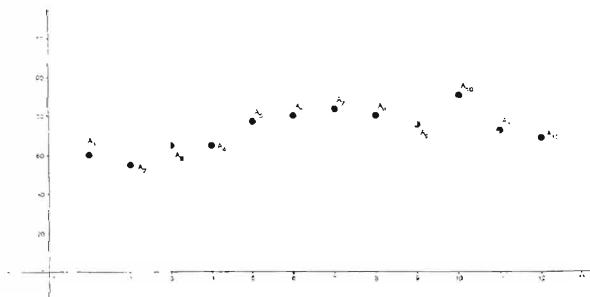
Sau khi hướng dẫn HS lập bảng và biểu diễn dãy số liệu về mối tương quan giữa điểm số trên lớp và thời gian học ở nhà của 12 HS, giáo viên đưa ra các mô hình phù hợp để HS chọn (mô hình tuyến tính hoặc mô hình đường bậc hai) (Hình 6).

Như vậy, thông qua minh họa ở trên (Hình 6), HS rút ra kết luận rằng, mô hình đường bậc hai biểu diễn các số liệu trong bảng 2 tốt hơn mô hình đường thẳng. Điều đó có nghĩa là HS phải biết sắp xếp thời gian học tập ở nhà một cách tối ưu để đạt được kết quả tốt nhất.

Ví dụ 6. (Bài toán xây cầu). Cho hai thành phố A và B nằm ở hai phía của một dòng sông. Tìm vị trí để xây dựng một chiếc cầu nối hai thành phố sao cho tổng quãng đường đi giữa hai thành phố là nhỏ nhất (giả sử hai bờ sông song song với nhau và cầu



Hình 5. Biểu diễn số liệu của bảng 2 trên trục số



Hình 6. Mối tương quan giữa số điểm và số giờ học ở nhà của HS

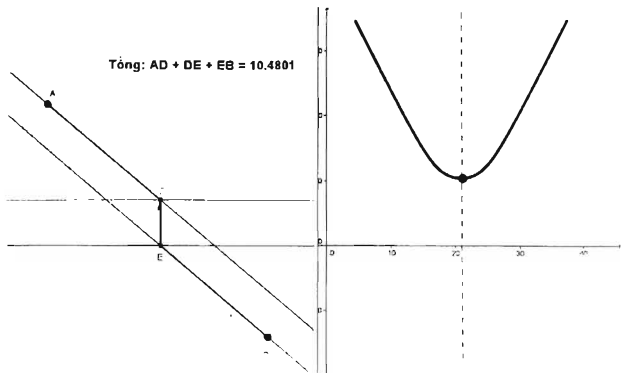
xây vuông góc với bờ sông).

Hoạt động. Giáo viên hướng dẫn HS sử dụng phần mềm toán học đồng GeoGebra mô hình hóa bài toán trên theo các bước sau:

Bước 1: Dựng hai đường thẳng song song cố định biểu diễn hai bờ sông. Hai điểm A, B cố định biểu diễn hai thành phố.

Bước 2 Dựng điểm D (di động) trên một trong hai đường thẳng trên. Dựng điểm E là hình chiếu vuông góc của điểm D trên đường thẳng còn lại.

Bước 3: Tính tổng khoảng cách $(AD + DE + EB)$.



Hình 7. Bài toán xây dựng cầu nối hai thành phố

Bước 4: Di chuyển điểm D trên đường thẳng và quan sát vị trí sao cho tổng khoảng cách trên đạt giá trị nhỏ nhất.

Giáo viên minh họa cửa sổ thứ hai biểu diễn các giá trị tương ứng của tổng $(AD + DE + EB)$. Sử dụng biểu diễn hội song song trong bài toán này sẽ giúp HS nhận ra được vị trí điểm D mà tổng trên đạt giá trị nhỏ nhất (điểm biểu diễn ở cửa sổ tương ứng trùng với vị trí thấp nhất trên đồ thị của parabol). Từ đó, giáo viên hướng dẫn HS rút ra nhận xét là tổng $(AD + DE + EB)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi hai đường thẳng AD và EB song song với nhau và sử dụng phép tịnh tiến (theo vectơ \vec{ED}) trong giải bài toán này.

3. Kết luận

Bài báo trình bày vai trò của biểu diễn hội trong dạy học toán và hướng dẫn giáo viên tổ chức một số hoạt động sử dụng các loại biểu diễn hội trong việc giúp học sinh hiểu các khái niệm về hàm số, giới hạn của dãy số, mô hình hóa một số hiện tượng toán học trong thực tiễn. Thông qua đó góp phần hình thành mối liên hệ hình học - đại số và phát triển tư duy linh hoạt, sáng tạo cho HS trong giải toán. Các hoạt động tích hợp và liên kết hợp lý các dạng biểu diễn trên lớp học truyền thống sẽ giúp HS kiến tạo tri thức mới một cách tích cực, hỗ trợ giải quyết vấn đề theo nhiều cách khác nhau, đặc biệt là các vấn đề được nảy sinh từ thực tiễn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] [1]. Thomas Armstrong, 2009. *Multiple intelligences in the classroom*. ASCD Publications.
- [2] Albert A. Cuoco, 2001. *The roles of representations in school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, USA.
- [3] Mike Fleetham, 2006. *Multiple Intelligences in practice: Enhancing self-esteem and learning in the classroom*. The Continuum International Publishing Group.
- [4] Athanasios Gagatsis, Constantinos Christou and Iliada Elia, 2004. *The nature of multiple representations in developing mathematical relationships*. Quaderni di Ricerca in Didattica, No.14, Italy.
- [5] Howard Gardner, 1983. *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. Basic Books Publisher.
- [6] Mehmet Fatih Özmantar, Hatice Akkoc, Erhan Bingölbali, Servet Demir and Berna Ergene, 2010. *Pre-service mathematics teachers' use of multiple representations in technology-rich environments*. Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, No.6, Turkey.
- [7] Maarten W van Someren, Peter Reimann, Henny P.A. Boshuizen & Ton de Jong, 1998. *Learning with multiple representations*. Elsevier Science Ltd.

ABSTRACT

The role of multiple representations in the teaching of mathematics

This paper presents the use of the theory of multiple intelligences and multiple representations in the teaching of mathematics. The use of various types of representations help students approach mathematical concepts in different ways. As a result, students can interpret the nature of these concepts and know how to choose the best way to solve the mathematical problem. With the support of dynamic mathematics software, multiple representations connect geometry and algebra, and develop students' ability to think flexibly when tackling mathematical problems.